

MPAS2 -algèbre. Déterminants

C. Huyghe

1. 1- Ecrire la formule du déterminant pour une matrice 4x4. Combien y a-t-il de termes dans cette formule?

2- Soient σ_1, σ_2 les permutations sur 4 éléments suivantes

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3- On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entourer en bleu les termes de la matrice correspondant à la permutation σ_1 et en rouge ceux correspondant à la permutation σ_2 . Les calculer. Avec quel signe ces termes apparaissent-ils?

2. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

3. Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le

développer que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

4. Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

5. Soit $(a_1, a_2, a_3) \in (\mathbb{K})^3$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et on considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A)$ par la règle de Sarrus. Montrer que $\det(A)$ est divisible par $(a_1 + a_2 + a_3)$. Calculer $\det(AV)$.

6. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on note $B_n(a, b)$ le déterminant suivant :

$$B_n(a, b) = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, B_n(a, b) = (a+b)B_{n-1}(a, b) - abB_{n-2}(a, b)$

- 1- Montrer que si $a \neq b$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, B_n(a, b) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

- 2- On suppose ici que $a = b$. Calculer $B_n(b, b)$ en fonction de n .

- 3- On pose $B_n(x, b) = B_n(a, b)$ le déterminant précédent pour $a = x$, avec $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $B_n(x, b) \in \mathbb{R}[x]$, et que la fonction définie par $f(x) = B_n(x, b)$ est continue si $s \text{ rig} b$. Vérifier que

$$B_n(b, b) = \lim_{x \rightarrow b} B_n(x, b).$$

7. On pose $\alpha = \cos x, \beta = \cos y, \gamma = \cos z, \lambda = \cos t$. Calculer les déterminants suivants :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \cos 2x & \cos 2y & \cos 2z \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos x & \cos y & \cos z & \cos t \\ \cos 2x & \cos 2y & \cos 2z & \cos 2t \\ \cos 3x & \cos 3y & \cos 3z & \cos 3t \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & & n \\ -1 & -2 & 0 & & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

8. 1- Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- 2- Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 3- Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier.

9. On considère la matrice suivante à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et

$$M(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 2t^2 & 4 \\ 2 & -2t & 0 & 3 \\ 3 & 3t & 4t+2 & 2 \\ 4 & 1 & 3t+2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $M(1)$ n'est pas inversible. Déterminer pour quelles valeurs de t la matrice $M(t)$ est inversible.

10. Mettre sous forme bien échelonnée la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11. Déterminer pour quelles valeurs de t , la matrice suivante est inversible et calculer son inverse.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$