Sous-espaces vectoriels ou affines de $\mathbb{R}^n$

C. Huyghe

1. Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

   $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad 3x - 7y = z\}$

   $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad x^2 - z^2 = 0\}$

   $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad x + y - z = x + y + z = 0\}$

   $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad z(x^2 + y^2) = 0\}$

2. Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

   $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$; $\quad E'_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}$.

   $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = 0, y = z\}$; $\quad E'_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}$.

3. Dans $\mathbb{R}^3$, on note les vecteurs $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Soit P le plan vectoriel d'équation $x + 2y + 3z = 0$. Soient e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et H le plan vectoriel engendré par e_1 et e_2, et H' le plan vectoriel engendré par e_1 et e_3.

   1- Donner un vecteur u engendrant l'intersection $H \bigcap P$.

   2- Donner un vecteur v engendrant l'intersection $H' \bigcap P$.

   3- On pose $w = e_3$.

   4- Montrer explicitement que e_1, e_2 et e_3 sont combinaison linéaire de u, v et w.

   5- En déduire que tout vecteur de a de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de u, v et w. Donner une formule explicite en fonction des coordonnées (x, y, z) du vecteur a.

4. Soit e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient $u = 2e_1$, $v = e_1 + 3e_2$, $w' = -4e_1 + 3e_2 - 6e_3$, $w = 2e_1 + e_2 + 2e_3$.

   1- Montrer que w' est combinaison linéaire de w et de v.

   2- A quoi est égal le plan P engendré par u et v ?

   3- Donner une équation du plan Q engendré par v et w.

   4- Donner une équation du plan P' parallèle à P et passant par le point de coordonnées $(1, 2, 3)$, et du plan Q' parallèle à Q et passant par $(1, 2, 3)$.

   5- Montrer que w n'appartient pas à P. Exprimer chaque e_i pour $i \in \{1, \ldots 3\}$ comme combinaison linéaire de u, v et w.

6- Donner une formule en fonction des coordonnées (x, y, z) d'un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ qui exprime ce vecteur comme combinaison linéaire de u, v et w.

5. Montrer que l'isobarycentre d'un parallélogramme est l'intersection de ses diagonales.

6. Un tétraèdre est déterminé par 4 points $A_1, \ldots, A_4$ de $\mathbb{R}^3$. Trois de ces points A_i, A_j, A_k déterminent un triangle, dont on note G_l l'isobarycentre. Montrer que les 4 droites $(G_1, A_1), \ldots, (G_4, A_4)$ sont concourantes.

7. Montrer que l'intersection de deux parties convexes de $\mathbb{R}^n$ est convexe.

8. Dans $\mathbb{R}^n$ on considère un sous-espace affine H d'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 2$. En cours, il a été démontré que H est convexe. Montrer que l'ensemble $\{u \in \mathbb{R}^n / a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \leq 2\}$ est convexe.