Géométrie affine dans $\mathbb{R}^3$

C. Huyghe

1. Soit P un plan muni d'un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points et les vecteurs sont exprimés par leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$.
   1- Donner un vecteur directeur, la pente une équation paramétrique et une équation cartésienne des droites (AB) suivantes :
      i. $A(2,3)$ et $B(-1,4)$
      ii. $A(-7,-2)$ et $B(-2,-5)$

   2- Donner des équations paramétriques et cartésiennes des droites passant par A et dirigées par $\vec{v}$ avec :
      i. $A(2,1)$ et $\vec{v}(-3,-1)$
      ii. $A(0,1)$ et $\vec{v}(1,2)$

   3- Donner des équations paramétriques et cartésiennes des droites définies comme suit :
      i. passant par le point $(2,-3)$ et parallèle à l'axe des x,
      ii. passant par le point $(-2,5)$ et parallèle à la droite $D : 8x + 4y = 3$.

2. On considère les 4 points A, B, C, D donnés. $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ définit-il bien un nouveau repère ?
   1- $A(2,-1,0)$, $B(7,-1,-1)$, $C(-3,0,-2)$, $D(3,-6,-3)$
   2- $A(4,1,4)$, $B(7,3,1)$, $C(9,0,0)$, $D(5,2,3)$

3. Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni de la base canonique.
   1- Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives $(-1,1,2)$ et $(3,0,2)$. Donner une équation du plan dirigé par $\vec{u}$, $\vec{v}$ passant par le point C de coordonnées $(2,1,3)$.
   2- Soient $\vec{u'}$, $\vec{v'}$ les vecteurs de coordonnées respectives $(2,1,-2)$ et $(-1,3,1)$. Donner une équation de la perpendiculaire au plan dirigé par $\vec{u'}$,$\vec{v'}$ et passant par le point D de coordonnées $(-1,1,0)$.

4. Soient (A, B, C, D) un parallélogramme. Calculer la norme du produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ en fonction de l'aire du parallélogramme.

5. Soient $(D_i)_{i=1\dots4}$ quatre droites du plan affine sécantes deux à deux en six points distincts. Si deux d'entre elles se coupent en A et les deux autres en B, on dit que $[AB]$ est une diagonale. Montrer que les milieux des trois diagonales sont alignés (on étudiera le problème analytiquement en choisissant un bon repère).

6. 1- Soient $(D_i : u_i x + v_i y + h_i = 0)_{i=1\dots3}$ trois droites du plan affine. Montrer qu'elles sont parallèles ou concourantes ssi $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & h_1 \\ u_2 & v_2 & h_2 \\ u_3 & v_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0$.

   2- Soient $(D_1 : x + 2y = 1)$, $(D_2 : x + y = 2)$, $(D_3 : 2x + y = 3)$, $(D_4 : 3x + 2y = 1)$. Déterminer une équation de la droite D qui passe par $D_1 \cap D_2$ et $D_3 \cap D_4$ sans calculer ces points d'intersection.

7. On considère la famille de plans $(P_m)_{m\in\mathbb{R}}$ définis par les équations cartésiennes :

$$m^2 x + (2m-1)y + mz = 3$$

   1- Déterminer les plans P_m dans chacun des cas suivants :

      i. $A(1,1,1) \in P_m$

      ii. $\vec{n}(2, -\frac{5}{2}, -1)$ est orthogonal à P_m.

      iii. $\vec{v}(1,1,1)$ est un vecteur directeur de P_m

   2- Montrer qu'il existe un unique point Q appartenant à tous les plans P_m.