Espaces vectoriels-MPA algèbre S2

C. Huyghe

1. Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

   $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad 3x - 7y = z\}$
   $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad x^2 - z^2 = 0\}$
   $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad x + y - z = x + y + z = 0\}$
   $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad z(x^2 + y^2) = 0\}$

2. Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

   $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$; $\quad E_1' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}$.
   $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = 0, y = z\}$; $\quad E_2' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}$.

3. Dans $\mathbb{R}^3$, on note les vecteurs $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Soit P le plan vectoriel d'équation $x + 2y + 3z = 0$. Soient e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et H le plan vectoriel engendré par e_1 et e_2, et H' le plan vectoriel engendré par e_1 et e_3.

   1- Donner un vecteur u engendrant l'intersection $H \bigcap P$.

   2- Donner un vecteur v engendrant l'intersection $H' \bigcap P$.

   3- On pose $w = e_3$.

   4- Montrer explicitement que e_1, e_2 et e_3 sont combinaison linéaire de u, v et w.

   5- En déduire que tout vecteur de a de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de u, v et w. Donner une formule explicite en fonction des coordonnées (x, y, z) du vecteur a.

4. Soit e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient $u = 2e_1$, $v = e_1 + 3e_2$, $w' = -4e_1 + 3e_2 - 6e_3$, $w = 2e_1 + e_2 + 2e_3$.

   1- Montrer que w' est combinaison linéaire de w et de v.

   2- A quoi est égal le plan P engendré par u et v ?

   3- Donner une équation du plan Q engendré par v et w.

   4- Donner une équation du plan P' parallèle à P et passant par le point de coordonnées $(1, 2, 3)$, et du plan Q' parallèle à Q et passant par $(1, 2, 3)$.

   5- Montrer que w n'appartient pas à P. Exprimer chaque e_i pour $i \in \{1, \ldots 3\}$ comme combinaison linéaire de u, v et w.

6- Donner une formule en fonction des coordonnées (x, y, z) d'un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ qui exprime ce vecteur comme combinaison linéaire de u, v et w.

5. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $F \bigcup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $F \subset G$ ou alors $G \subset F$.

6. Montrer que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Soit

$$R = \{z \,|\, \exists \lambda \in \mathbb{R} \,|\, \overline{z} = \lambda z\} .$$

Quels sont les éléments de R ? Soit $z \notin R$, montrer alors que l'on a

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}z \bigoplus \mathbb{R}\overline{z}.$$

7. Soient $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $I \to \mathbb{R}$. Soit $c \in I$.

1- Soit $F = \{f \in E \,|\, f(c) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2- Soit $H = \{f \in E \,|\, f(c) = 1\}$. Est-ce que H est un sous-espace vectoriel de E ?

3- Soit $K = \{f \in E \,|\, f(c) \geq 0\}$. Est-ce que K est un sous-espace vectoriel de E ?

8. Soit U l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soient $a, b \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. On note $U_{a,b}$ l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+2} = a u_n + b u_{n+1}.$$

Montrer que $U_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de U, non réduit à 0, c'est-à-dire à la suite constante égale à 0.

9. Soit e_1, e_2, e_3 la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$. Soient $u = 2e_1$, $v = e_1 + 3e_2$, $w' = -4e_1 + 3e_2 - 6e_3$, $w = 2e_1 + e_2 + 2e_3$.

1- Montrer que w' est combinaison linéaire de w et de v.

2- A quoi est égal le plan P engendré par u et v ?

3- Trouver un vecteur e de E, tel que

$$E = P \bigoplus \mathbb{R} \cdot e.$$

Ecrire la décomposition obtenue des vecteurs e_1, e_2, e_3 en fonction d'un vecteur de P et de la droite $D = \mathbb{R} \cdot e$.

10. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$, qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Répondez par oui ou par non aux assertions suivantes, en justifiant votre réponse.

1- Soit $F_1 = \left\{f \in E \,|\, f^2 = f\right\}$. Est-ce que F_1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

2- Soit $F_2 = \{f \in E \,|\, f(1) = 0\}$. Est-ce que F_2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

3- Soit $F_3 = \left\{f \in E \,|\, \int_0^1 f(t)dt = 0\right\}$. Est-ce que F_3 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

4- $E = \mathbb{R} \bigoplus F_3$.

5- $E = \mathbb{R} \bigoplus F_2$.

11. Soit E est l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ non nul, on note S_α l'ensemble des matrices M telles que $M = \alpha {}^t M$, où ${}^t M$ est la matrice transposée de M.

    1- Montrer que E_α est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$ et que si $M \in E_\alpha$, alors ${}^t M \in E_\alpha$.

    2- Montrer que E_α est réduit à 0 sauf si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

    3- On note S le sous espace-vectoriel E_1 des matrices symétriques, A le sous espace vectoriel E_{-1} des matrices antisymétriques. Montrer que A est une droite vectorielle et que $M_2(\mathbb{C}) = S \bigoplus A$.

Enoncés tirés du CC, L1 algèbre S2 de 2014

12. Répondez par oui ou par non aux assertions suivantes, en justifiant votre réponse.

    1- Si, pour tout $x \in F$, $-x \in F$ alors F est un sous-espace vectoriel de E.

    2- Si, pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$ alors F est un sous-espace vectoriel de E.

    3- Si F est un sous-espace vectoriel de E alors
    pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F^n$, $\sum_{i=1}^{n} x_i \in F$.

    4- Si, pour tout $a \in \mathbb{K}$, pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$ alors F est un sous-espace vectoriel de E.

13. Répondez par oui ou par non aux assertions suivantes, en justifiant votre réponse.

    1- Si $E = \mathbb{R}[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes alors l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré 1 est un sous-espace vectoriel de E.

    2- Si E est l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles alors l'ensemble des suites à valeurs réelles croissantes est un sous-espace vectoriel de E.

    3- Si E est l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$ alors l'ensemble des matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $ad - bc = 0$ est un sous-espace vectoriel de E.

    4- Si E est l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$ alors l'ensemble des matrices M telles que $a + d = 0$ est un sous-espace vectoriel de E.