Espaces vectoriels, familles libres et génératrices

C. Huyghe

1. 1- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $F \bigcup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $F \subset G$ ou alors $G \subset F$.

   2- Soient K un corps, E un K-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Que pensez-vous de l'énoncé analogue pour F et G ?

2. Soient $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $I \to \mathbb{R}$. Soit $c \in I$.

   1- Soit $F = \{f \in E \mid f(c) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

   2- Soit $H = \{f \in E \mid f(c) = 1\}$. Est-ce que H est un sous-espace vectoriel de E ?

   3- Soit $K = \{f \in E \mid f(c) \geq 0\}$. Est-ce que K est un sous-espace vectoriel de E ?

3. 1- Montrer que $e^{i\pi/3}$ et $2e^{i\pi/4}$ forment une famille libre de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.

   2- Montrer 1, $e^{i\pi/3}$ et $2e^{i\pi/4}$ forment une famille liée.

4. Soit U l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soient $a, b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. On note $U_{a,b}$ l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+2} = au_n + bu_{n+1}.$$

   Montrer que $U_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de U, non réduit à 0, c'est-à-dire à la suite constante égale à 0.

5. Soit e_1, e_2, e_3 la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$. Soient $u = 2e_1$, $v = e_1 + 3e_2$, $w' = -4e_1 + 3e_2 - 6e_3$, $w = 2e_1 + e_2 + 2e_3$.

   1- Montrer que w' est combinaison linéaire de w et de v.

   2- A quoi est égal le plan P engendré par u et v ?

   3- Trouver un vecteur e de E, tel que

$$E = P \bigoplus \mathbb{R} \cdot e.$$

   Ecrire la décomposition obtenue des vecteurs e_1, e_2, e_3 en fonction d'un vecteur de P et de la droite $D = \mathbb{R} \cdot e$.

6. On pose $E = M_2(\mathbb{R})$. Soit $A = (a_{i,j}) \in E$. Pour $A \in E$, on pose $Tr(A) = a_{1,1} + a_{2,2}$.

1- Soit $F = \{A \in E \,|\, Tr(A) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Quelles équations, portant sur les coefficients $(a_{i,j})$ caractérisent-elles les éléments de F ? Donner une famille génératrice de 3 matrices de F.

2- On considère la droite vectorielle H engendrée par $Id \in E$. Montrer que

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \,|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

et que

$$E = F \bigoplus H.$$

7. Soient $a \in \mathbb{R}$, $v_1 = (1, 1-a, a)$, $v_2 = (a-2, 2, 3)$ et $v_3 = (1, a, 1)$. Pour quelles valeurs de a, les vecteurs v_1, v_2 et v_3 forment-ils une famille libre dans $\mathbb{R}^3$? Même question dans $\mathbb{C}$.

8. Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   1- Montrer que les fonctions $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$ appartiennent à E et sont linéairement indépendantes.

   2- Montrer que les quatre fonctions définies par

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos t \cosh t, \\ x_2(t) &= \sin t \cosh t, \\ x_3(t) &= \cos t \sinh t, \\ x_4(t) &= \sin t \sinh t \end{aligned}$$

   appartiennent à E et sont linéairement indépendantes.

9. Soit $E = \mathbb{R}_3[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, deg(P) \leq 3\}$.

   1- Montrer que les polynômes 1, X, X^2, X^3 forment une famille libre et génératrice de E.

   2- Soit $F = \{P \in E \,|\, P(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, engendré par X, X^2 et X^3. Montrer que la droite vectorielle D engendrée par le polynôme constant 1 est supplémentaire de F dans E.

   3- Montrer que les polynômes 1, $X-1$, $(X-1)^2$, $(X-1)^3$ forment une famille libre et génératrice de E (indication : on pourra faire le changement de variable $Y = X - 1$ et considérer le polynôme en Y, $P(Y+1) = P(X)$, pour $P \in E$).

   4- Soit $G = \{P \in E \,|\, P(1) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, engendré par $X-1$, $(X-1)^2$ et $(X-1)^3$ et que la droite vectorielle D engendrée par le polynôme constant 1 est supplémentaire de G dans E.

10. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1]$, qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Répondez par oui ou par non aux assertions suivantes, en justifiant votre réponse.

    1- Soit $F_1 = \{f \in E \mid f^2 = f\}$. Est-ce que F_1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

    2- Soit $F_2 = \{f \in E \mid f(1) = 0\}$. Est-ce que F_2 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

    3- Soit $F_3 = \left\{f \in E \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\right\}$. Est-ce que F_3 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

    4- $E = \mathbb{R} \bigoplus F_3$.

    5- $E = \mathbb{R} \bigoplus F_2$.

Enoncés tirés du CC, L1 algèbre S2 de 2014 (resp. P. Py)

11. Répondez par oui ou par non aux assertions suivantes, en justifiant votre réponse.

    1- Si, pour tout $x \in F$, $-x \in F$ alors F est un sous-espace vectoriel de E.

    2- Si, pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$ alors F est un sous-espace vectoriel de E.

    3- Si F est un sous-espace vectoriel de E alors
    pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F^n$, $\sum_{i=1}^n x_i \in F$.

    4- Si, pour tout $a \in \mathbb{K}$, pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$ alors F est un sous-espace vectoriel de E.

12. Répondez par oui ou par non aux assertions suivantes, en justifiant votre réponse.

    1- Si $E = \mathbb{R}[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes alors l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré 1 est un sous-espace vectoriel de E.

    2- Si E est l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles alors l'ensemble des suites à valeurs réelles croissantes est un sous-espace vectoriel de E.

    3- Si E est l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$ alors l'ensemble des matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $ad - bc = 0$ est un sous-espace vectoriel de E.

13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient A et B deux parties non vides de E telles que $A \neq B$ et $A \subset B$.

    1- Si B est une famille libre, alors A est une famille libre.

    2- Si B est une famille génératrice, alors A est une famille génératrice.

    3- Si A forme une base de E, alors B est génératrice.

    4- Si A forme une base de E, alors B est libre.