Espaces vectoriels, familles libres, génératrices, bases, dimension

C. Huyghe

1. Indiquer quelles familles de trois vecteurs sont libres dans les deux cas suivants.

   1- $\vec{v}_1(1,0,1)$, $\vec{v}_2(0,2,2)$ et $\vec{v}_3(3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

   2- $\vec{v}_1(1,0,0)$, $\vec{v}_2(0,1,1)$ et $\vec{v}_3(1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{v}_1 = (1,2,3,4)$ et $\vec{v}_2 = (1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1) \in \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$? Et pour que $(x,1,1,y) \in \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$?

3. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

4. Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $\vec{v}_1 = (1,1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (1,2,3,4)$, $\vec{v}_3 = (3,1,4,2)$, $\vec{v}_4 = (10,4,13,7)$, $\vec{v}_5 = (1,7,8,14)$. À quelle(s) condition(s) un vecteur $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ appartient-il au sous-espace engendré par les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$? Définir ce sous-espace par une ou des équations. Indication : on pourra commencer par chercher une base de cet espace.

5. Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}\{(1,0,1,1), (-1,-2,3,-1), (-5,-3,1,-5)\} \\ G &= \text{Vect}\{(-1,-1,1,-1), (4,1,2,4)\}. \end{aligned}$$

   Indication : on pourra commencer par trouver une ou des équations cartésiennes de F.

6. Soient $t \in \mathbb{R}$, et dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{v}_1 = (1,2t,3,4)$, $\vec{v}_2 = (1,-2,3t-1,-4)$, $\vec{v}_3 = (3,1,4,2)$. Pour quelles valeurs de t, les vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ forment-ils une famille libre ?

7. Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n,$$

   et telle que $u_0 = u_1 = 1$.

8. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3.

   1- Montrer que $(1, X, \ldots, X^3)$ est une base de E et que $dim(E) = 4$.

2- Montrer qu'il existe un unique polynôme P_i de E tel que $\forall j \neq i$, $P_i(j) = 0$ et $P_i(i) = 1$. Donner une formule pour ce polynôme sans la développer.

3- Montrer que la famille $(P_1, \ldots, P_3)$ est libre et que c'est une base de E.

4- Soit $Q \in E$, montrer que

$$Q(X) = \sum_{j=0}^{3} Q(j) P_j.$$

Les polynômes P_j sont appelés polynômes de Lagrange.

9. Soient $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. On admet que E est de dimension $n+1$ (voir exercice précédent). Soit

$$F = \left\{ P \in E \,|\, P(1) = P'(1) = 0 \right\}.$$

1- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et que $(X-1)^2 \mathbb{R}_{n-2}[X] = F$. Dans la suite, on note $H = \mathbb{R}_1[X]$.

2- A quoi est égale la dimension de H ?

3- Soit $Q(X) \in E$, $R(X)$ et $T(X)$ la quotient et le reste de la division euclidienne de Q par $(X-1)^2$. Montrer que $E = F \bigoplus H$.

4- Montrer de deux façons différentes que F est de dimension $n-1$.

10. Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes. Si la réponse est Faux, alors donner un contre-exemple et donner une démonstration si la réponse est vraie.

1- Soient P_1 et P_2 deux plans d'un espace vectoriel E, alors $dim(P_1 + P_2) = 4$.

2- Soient P_1 et P_2 deux plans distincts de $\mathbb{C}^3$. Alors $dim(P_1 \bigcap P_2) = 1$.

3- Soit P un plan de $\mathbb{C}^3$, de base u_1 et u_2. Alors les vecteurs $v_1 = \frac{u_1 - u_2}{2}$ et $v_2 = \frac{u_1 + u_2}{2}$ forment une base de P.

4- Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, $H \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, D une droite vectorielle de E, alors $E = H \bigoplus D$.