Applications linéaires

C. Huyghe

1. Déterminer si les applications f_i suivantes sont linéaires :

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 &\quad f_2(x,y,z) = (xy, x, y) \\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 &\quad f_3(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y) \\ f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 &\quad f_4(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y) \\ f_4 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 &\quad f_5(P) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{aligned}$$

2. Soient f et g, applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définies par $f(z) = \bar{z}$ et $g(z) = \mathrm{Re}(z)$. Montrer que f et g sont linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-e.v., et non linéaires sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-e.v.

3. Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même telle que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

4. Montrer que
$$f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$$
est une forme linéaire sur $C^\infty(\mathbb{R})$

5. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $\big(x, f(x)\big)$ est liée.
   1- Montrer que si $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
   2- Comparer λ_x et λ_y lorsque (x,y) est libre.
   3- Montrer que f est une homothétie.

6. 1- Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f((1,0,0)) = (1,1)$ puis $f((0,1,0)) = (0,1)$ et $f((0,0,1)) = (-1,1)$. Calculer $f((3,-1,4))$ et $f((x,y,z))$ en général.
   2- Déterminer $\mathrm{Ker} f$. En fournir une base. Donner un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à $\mathrm{Im} f$.
   3- Montrer que $3 = dim(Kerf) + dim(Im(f))$.

7. 1- Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f((1,0,0)) = (1,1,0)$ puis $f((0,1,0)) = (3,1,0)$ et $f((0,0,1)) = (0,-2,0)$. Calculer $f((x,y,z))$ en général.
   2- Donner une base de $Kerf$.

3- Donner une base de Imf.

4- Montrer que $3 = dim(Kerf) + dim(Im(f))$.

8. Refaire l'exercice précédent avec f : de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f((1,0,0)) = (1,2,0)$ puis $f((0,3,4)) = (5,6,0)$.

9. 1- Donner une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, puis comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   2- Montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel peut se mettre sous la forme : $f(z) = \lambda z$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

   3- Désormais, on considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

      i. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que l'application : $z \mapsto az + b\overline{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

      ii. Montrer que tout endomorphisme de $\mathbb{C}$ peut se mettre sous la forme : $f(z) = az + b\overline{z}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$. (Indication : on pourra procéder par analyse/synthèse en supposant d'abord que la propriété à démontrer est vraie, afin de calculer a et b et ensuite en la démontrant).

      iii. CNS sur a et b pour que f soit bijectif ?

10. Soient $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$ et $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 2y + z = 0, x - y - z = 0\}$. On désigne par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

    1- Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallélement à D. Calculer $p(u)$ où u a pour coordonnées (x,y,z).

    2- Soit s la symétrie par rapport à P parallélement à D. Calculer $s(u)$ où u a pour coordonnées (x,y,z).

11. Soient $E = \mathbb{R}_5[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 5, et $F = \mathbb{R}_2[X]$, $A(X)$ un polynôme de degré 3 de E.

    1- Montrer que $(1, X, \ldots, X^5)$ est une base de E et que $dim(E) = 6$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension 3.

    2- Pour $P \in E$, on pose $Q(X)$ et $R(X)$ le quotient de la division euclidienne de P par A. Les polynômes Q et R sont donc uniquement déterminés par $deg(R) < 3$ et

    $$P(X) = A(X)Q(X) + R(X).$$

    Soit f l'application : $P \mapsto R$. Montrer que f est linéaire et est un projecteur : $E \to F$. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$. Vérifier que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires dans E. Donner une base de E provenant d'une base de $Ker(f)$ et de $Im(f)$.

12. Soient E un K-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^4 - 3f + 2Id = 0$. Montrer que f est un isomorphisme.

13. Soit E un K-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \bigoplus G$. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Montrer que $q = Id - p$ est un projecteur. A quoi est égal $Ker(q)$ et $Im(q)$?

14. Soient E un K-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = Id$. On pose $F = Ker(f - Id)$ et $G = Ker(f + Id)$.

    1- Montrer que $F = \{x \mid f(x) = x\}$ et que $G = \{x \mid f(x) = -x\}$.

    2- Soit
    $$p = \frac{1}{2}(f + Id).$$
    Montrer que p est un projecteur.

    3- En déduire que $E = F \bigoplus G$.

    4- Soit $x = y + z$, décomposé suivant la somme directe précédente. Montrer que $\forall x \in E,\ f(x) = y - z$. On dit que f est une symétrie vectorielle.

    5- Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $P = Vect(u, v)$ et $D = Vect(w)$. On définit une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par $f(u) = u, f(v) = v, f(w) = -w$. Montrer que $f^2 = Id$, donc que f est une symétrie vectorielle et donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

15. Soient E un K-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f$. On pose $F = Ker(f - Id)$ et $G = Ker(f)$.

    1- Montrer que $E = F \bigoplus G$.

    2- Soit $x = y + z$, décomposé suivant la somme directe précédente. Montrer que $\forall x \in E,\ f(x) = y$.

    On dit que f est la projection sur F parallèlement à G.