Applications linéaires ; théorème du rang, matrices

C. Huyghe

1. Déterminer la dimension du noyau et de l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Déterminer, suivant la valeur du paramètre t, quand l'application $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est donnée égale à A ci-dessous, est injective ou surjective.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}.$$

3. Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :

   (i) $\ker f = \operatorname{Im} f$

   (ii) $f^2 = 0$ et $n = 2 \cdot \operatorname{rg}(f)$. En déduire que E est de dimension paire.

4. Reprendre l'exercice précédent avec $n = 4$. Montrer que dans la situation (i), il existe une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   les symboles $*$ désignant des nombres réels quelconques. Que peut-on dire du rang de la matrice carrée en haut à droite de taille $2x2$?

5. Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

   1- $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$.

   2- $\operatorname{Ker}(f)$ inclus strictement dans $\operatorname{Im}(f)$.

   3- $\operatorname{Im}(f)$ inclus strictement dans $\operatorname{Ker}(f)$.

On pourra donner leur matrice.

6. Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

   1- $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ et est inclus strictement dans $\mathrm{Im}(f)$.

   2- $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ et est inclus strictement dans $\mathrm{Ker}(f)$.

   On pourra donner leur matrice.

7. Soit $E = \mathbb{R}^3$, dont on note les coordonnées (x, y, z) et la base canonique (e_1, e_2, e_3). Soit F le sous-espace vectoriel d'équation $x + 2y - z = 0$. Soit D la droite vectorielle de vecteur directeur $e_1 + e_2 + e_3$.

   1- Montrer que $E = F \bigoplus D$.

   2- Donner une base de F et de G : la réunion de ces deux bases forme une base notée $\mathcal{B}$ de E. Donner la matrice de changement de base P entre cette base et la base canonique de E.

   3- Calculer P^{-1}. Donner la matrice de la projection p (resp. de la symétrie s) dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base canonique de E.

8. Soit $E = \mathbb{R}^3$. On munit E de la base canonique. On considère $f_1 = e_1 - 2e_2$, $f_2 = e_2 + e_1 - 3e_3$, $f_3 = 2e_1 + e_2$.

   1- Montrer que (f_1, f_2, f_3) forment une base $\mathcal{B}$.

   2- Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix},$$

   où $t \in \mathbb{R}$. Calculer la matrice de u dans la base canonique de E.

9. Reprendre l'exercice 11 de la feuille précédente. Donner une base de $E = \mathbb{R}_5[X]$, dans laquelle le projecteur décrit à la dernière question de l'exercice a pour matrice une matrice diagonale, ne comportant que des 1 et des 0.

10. Soient $E = \mathbb{C}^2$. On munit E de la base canonique (e_1, e_2). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

    $$A = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -12/5 & -1/5 \end{bmatrix}.$$

    1- Montrer que f est une symétrie vectorielle. Préciser la direction de cette symétrie, correspondant aux vecteurs tels que $f(u) = -u$, en donnant une base f_1 de ce sous-espace vectoriel, et la droite des invariants de cette symétrie correspondant aux vecteurs tels que $f(u) = u$, en donnant une base f_2 de cette droite.

    2- Donner la matrice A' de cette symétrie dans la base (f_1, f_2). Calculer A^n.