Changements de base

C. Huyghe

1. Soient $E = \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées des vecteurs dans la base canonique sont notées (x, y, z). Soit P la plan d'équation : $x + 2y - z = 0$

   1- Déterminer une base de P.

   2- Soit D la droite vectorielle dirigée par le vecteur de coordonnés $(1, -1, 2)$. Montrer que $E = P \bigoplus D$.

   3- Soient p_1 le projecteur sur P parallèlement à D et p_2 le projecteur sur D parallèlement à P. Montrer que $Id = p_1 + p_2$.

   4- En appliquant la méthode du cours, qui consiste à écrire la matrice B_1 de p_1 (resp. B_2 p_2) dans une base adaptée à la décomposition $E = P \bigoplus D$, et à faire un changement de base, calculer les matrices A_1 et A_2 de p_1 et p_2 respectivement dans la base canonique. Vérifier que $Id = A_1 + A_2$.

2. Soit $E = K^n$, et D une matrice de E, dont seuls les termes diagonaux sont non nuls. On note $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ où $d_i \in K$. On suppose que $d_i \in \{0, 1\}$. Soit A une matrice de $M_n(K)$ semblable à D et f_A l'application linéaire associée. Montrer que f_A est un projecteur si et seulement si $d_i \in \{0, 1\}$ pour tout i.

3. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda = Ker(u - \lambda Id)$ e_1, e_2, e_3 des vecteurs non nuls de E_1, E_2, E_3.

   1- Montrer que (e_1, e_2, e_3) forment une base de E.

   2- Ecrire la matrice A de u dans cette base et calculer A^n.

4. Soit A la matrice suivante
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   1- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer pour quelles valeurs de λ, $E_\lambda = Ker(A - \lambda Id)$ est non nul.

   2- Déduire de la question précédente qu'il existe une matrice inversible P telle que
$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

5. Soient K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie dont on fixe une base B, $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n scalaires de K distincts tels que si A est la

matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ on ait

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & . & \dots & . & . \\ 0 & \lambda_2 & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

1- Pour $\lambda \in K$, on note $E_\lambda = Ker(A - \lambda Id)$. Calculer la dimension de E_λ si $\lambda \neq \lambda_i$.

2- On suppose que $\lambda = \lambda_i$, montrer que $dim(E_{\lambda_i}) = 1$. Soit u_i un vecteur non nul de E_{λ_i}. Que vaut $A(u_i)$ en fonction de u_i ?

3- Montrer que $u_1, \dots u_n$ forment une base de K^n.

4- Montrer que A est semblable à une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

6. Soient K un corps, T la matrice colonne $(1, 0, 0)$, $\lambda \in K$ et

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Discuter le rang de $A - \alpha Id$ suivant les valeurs de α. Soit Y non nul tel que $AY = \lambda Y$.

1- Montrer que A est semblable à une matrice du type :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & * \\ 0 & \lambda & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

où * est un scalaire quelconque de K.

2- Soit Z deux matrices colonnes de $M_{3,1}(K)$. Quelles sont les solutions de l'équation $AZ = Y + \lambda Z$?

3- Montrer que A est semblable à

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

4- Calculer B^n, et en déduire A^n pour tout n.

7. Soit $E = K_n[X]$ le K-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

1- Soit f définie par $f(P) = (X+1)P'(X)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$, et donner une base de $Ker(f)$.

2- Ecrire la matrice A de f dans la base $1, X, \dots, X^n$. Soit $E_\lambda = Ker(f - \lambda Id)$. Pour quelles valeurs de λ a-t-on $E_\lambda \neq \{0\}$?

3- Montrer que $1, (X+1), \dots, (X+1)^n$ forment une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.

8. Soient K un corps, E un K-espace vectoriel, $f, g \in \mathcal{L}(E)$, tels que $f \circ g = g \circ f$.

1- Monter que $Kerf$ et Imf stables par g, i.e. $g(Kerf) \subset Kerf$ et $g(Imf) \subset Imf$.

2- Soient $\lambda \in K$ et $E_\lambda = Ker(f - \lambda Id)$. Montrer que E_λ est stable par g.

9. Soit K un corps et $E = M_2(K)$. Pour $A \in E$, on considère l'application $\varphi_A : E \to E$ définie par $\varphi_A(M) = AM$. On munit E de sa base canonique des matrices élémentaires $E_{i,j}$ pour $i, j \in \{1, 2\}$: $(E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$.

1- Quelle est la matrice R_A de φ_A dans cette base ?

2- On suppose que A est semblable à B. Montrer que R_A et R_B sont semblables.

10. Montrer que les matrices suivantes ne sont pas semblables.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$