Endomorphismes d'espace vectoriel, vecteurs propres et valeurs propres, questions diverses

C. Huyghe

1. Soient K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$, tel $u^n = 0$.

   1- Montrer que 0 est la seule valeur propre de u. A quelle condition u est-il diagonalisable ?

   2- Soit $x \in E$. On pose $E_x = Vectx, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)$. Montrer que E_x est stable par u, i.e. $u(E_x) \subset E_x$.

   3- On suppose désormais qu'il n'existe pas de sous-espaces stables par u à part 0 et E. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u s'écrit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$.

   1- Montrer que u est une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{C}$ et en particulier que u est diagonalisable. On pose $\lambda = a + ib$.

   2- On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. Alors u est $\mathbb{R}$-linéaire et induit un enomorphisme v de $\mathbb{R}^2$. Ecrire la matrice de v dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. A quelle condition est-ce que v est diagonalisable comme endomorphisme de $\mathbb{R}^2$? Quels sont alors les vecteurs propres ?

   3- Montrer que la matrice de v est semblable à

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

   avec $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Soient $E = \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées des vecteurs dans la base canonique sont notées (x, y, z). Soit P la plan d'équation : $x + 2y - z = 0$

   1- Déterminer une base de P.

   2- Soit D la droite vectorielle dirigée par le vecteur de coordonnés $(1, -1, 2)$. Montrer que $E = P \bigoplus D$.

3- Soient p_1 le projecteur sur P parallèlement à D et p_2 le projecteur sur D parallèlement à P. Montrer que $Id = p_1 + p_2$.

4- En appliquant la méthode du cours, qui consiste à écrire la matrice B_1 de p_1 (resp. B_2 p_2) dans une base adaptée à la décomposition $E = P \bigoplus D$, et à faire un changement de base, calculer les matrices A_1 et A_2 de p_1 et p_2 respectivement dans la base canonique. Vérifier que $Id = A_1 + A_2$.

4. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et s une symétrie vectorielle : $E \to E$. Montrer que les seules valeurs propres possibles de s sont -1 et 1.

5. Soit A la matrice suivante
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1- Cette matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

2- Cette matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Quelles sont les valeurs propres de cette matrice ? Donner les vecteurs propres de cette matrice.

3- Montrer que A est semblable sur $\mathbb{C}$ à une matrice diagonale D, que l'on précisera, mais pas sur $\mathbb{R}$.

6. Soient K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie dont on fixe une base B, $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n scalaires de K distincts tels que si A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ on ait
$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & . & \ldots & . & . \\ 0 & \lambda_2 & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$
Montrer que A est diagonalisable.

7. Soient K un corps, $\lambda \in K$ et
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$
Discuter le rang de $A - \lambda Id$ suivant les valeurs de λ. En déduire :

1- Les valeurs propres et les vecteurs propres de A,

2- le fait que A n'est pas diagonalisable.

8. Soient K un corps, E un K-espace vectoriel, $f, g \in \mathcal{L}(E)$, tels que $f \circ g = g \circ f$.

1- Monter que $Kerf$ et Imf stables par g, i.e. $g(Kerf) \subset Kerf$ et $g(Imf) \subset Imf$.

2- Soient $\lambda \in K$ et E_λ le sous-espace propre associé à λ (éventuellement réduit à $\{0\}$). Montrer que E_λ est stable par g.

3- Cas particulier : prenons $E = \mathbb{C}^3$, et f diagonalisable, ayant pour vecteurs propres (v_1, v_2, v_3) associés aux valeurs propres 1, 2 et 3. Montrer que si g commute avec f, alors g est diagonalisable.