MPAS2 -algèbre. Introduction aux permutations

C. Huyghe

1. Calculer les signatures des permutations suivantes.
   1- $\sigma_1 = (1, 2, 4, 3, 5) \in S_5$,
   2- $\sigma_2 = (2, 3, 4, 5, 1) \in S_5$,
   3- $\sigma_3 = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Ecrire explicitement cette permutation.
   4- $\sigma_4 = (1, 3, 2, 5, 4) \in S_5$,
   5- $\sigma_5 = \sigma_4 \circ \sigma_3$. Ecrire explicitement cette permutation.
2. Soit $A \in M_5(\mathbb{C})$, $A = (a_{i,j})$ avec $0 \leq i, j \leq 5$. On suppose que A est triangulaire supérieure, c'est-à-dire que $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.
   1- Déterminer, parmi les éléments σ_t de la liste précédente, pour $1 \leq t \leq 5$, ainsi que pour $\sigma_0 = Id$, ceux pour lesquels
   $$a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} a_{4,\sigma(4)} a_{5,\sigma(5)} = 0,$$
   pour toute matrice A triangulaire supérieure.
   2- Pour quelles permutations de S_5 a-t-on $a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} a_{4,\sigma(4)} a_{5,\sigma(5)} = 0$ pour $A = Id$?
3. Soit S_4 le groupe des permutations d'un ensemble à 4 éléments. On écrit les éléments σ de S_4 sous la forme d'une liste $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4))$.
   1- Quel est le cardinal de S_4 ?
   2- Soit $\tilde{\sigma}$ un élément de S_3, définie par les éléments $(\tilde{\sigma}(1), \tilde{\sigma}(2), \tilde{\sigma}(3))$. On considère l'application $\Phi : S_3 \to S_4$, définie de la façon suivante. Si $\sigma = \Phi(\tilde{\sigma})$
   $$\sigma(1) = \tilde{\sigma}(1) \tag{1}$$
   $$\sigma(2) = \tilde{\sigma}(2) \tag{2}$$
   $$\sigma(3) = \tilde{\sigma}(3) \tag{3}$$
   $$\sigma(4) = 4 \tag{4}$$
   3- Montrer que si $\tilde{\tau} \in S_3$ est une transposition, alors $\tau = \Phi(\tilde{\tau})$ est une transposition de S_4.
   4- Montrer que Φ est un morphisme de groupes, c'est-à-dire que $\Phi(Id) = Id$ et que si $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}' \in S_3$, alors $\Phi(\tilde{\sigma}) \circ \Phi(\tilde{\sigma}') = \Phi(\tilde{\sigma} \circ \tilde{\sigma}')$.

5- Montrer que si $\sigma = \Phi(\tilde{\sigma})$, alors $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tilde{\sigma})$.

6- Soit $\sigma \in S_4$. Montrer qu'il existe $\tau \in S_4$, $\tilde{\sigma} \in S_3$ tels que

$$\sigma = \tau \circ \Phi(\tilde{\sigma}).$$

Discuter l'unicité de cette décomposition. A quelle condition a-t-on $\tau = Id$?