

Révisions d'algèbre linéaire

C. Huyghe

1. Dans l'espace $\mathbb{C}^4$, on se donne cinq vecteurs : $V_1 = (-2 + i, 2i, -1 + 2i, -1 + 4i)$, $V_2 = (1, 2, 3, 4)$, $V_3 = (3, 1, 1 + i, 2)$, $V_4 = (3 + 2i, 5, 5 + i, 9 + i)$, $V_5 = (1, 1, 0, 1)$. À quelle(s) condition(s) un vecteur $W = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartient-il au sous-espace engendré par les vecteurs V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 ? Définir ce sous-espace par une ou des équations.
2. On désigne par E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
 - 1- Soient D_1, D_2, D_3 des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ distinctes deux à deux. Alors $\mathbb{R}^3$ est somme de D_1, D_2, D_3 .
 - 2- Soient F et G des hyperplans vectoriels de E . Alors $E \neq F \cup G$.
 - 3- Soient P_1 et P_2 des plans vectoriels de E tels que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$. Alors $\dim E \geq 4$.
 - 4- Soient F et G des sous-espaces de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. Alors $F \cap G \neq \{0\}$.
 - 5- Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $F = \text{Vect}\{e_1, e_3\}$. Tout sous-espace vectoriel supplémentaire de F contient e_2 .
 - 6- L'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{R}^5$ est un plan.
3. Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

- 1- Calculer le polynôme caractéristique de A .
- 2- La matrice A est-elle diagonalisable ?
- 3- On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dans la base canonique. Donner une base de vecteurs propres de u .
4. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, et $f : E \rightarrow E$ définie par :

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

- 1- Montrer que f est une application linéaire et donner une base de $\ker f$.

- 2- On traite le cas $n = 2$ et 3. Montrer que f est diagonalisable, en se ramenant à l'exercice précédent pour $n = 3$.
- 3- Pour n général, montrer que f est diagonalisable et donner une base de $\text{Im } f$.
5. Soient A et B deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ ayant même polynôme caractéristique. Ces deux matrices sont-elles semblables ?
6. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. On considère l'application $r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $r(z) = ze^{i\theta}$.
- 1- Montrer que r est une application $\mathbb{R}$ -linéaire et écrire la matrice de cette application dans la base $1, i$ de $\mathbb{C}$.
- 2- En déduire la matrice de la rotation d'angle θ dans le plan $\mathbb{R}^2$.
7. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, distincts, et soient

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}.$$

Montrer que A et B sont semblables.

8. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, et soient

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 2 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Montrer que A et B sont semblables.

9. On se donne deux matrices A et B dans $M_5(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation $M^2 = M$. Les matrices A et B sont-elles semblables ?
10. Soit A une matrice diagonalisable de $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant l'équation $M^2 + iM + Id = 0$ et $u : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est A .
- 1- Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?
- 2- Montrer qu'il existe une valeur propre λ de u telle que la dimension du sous-espace propre associé soit supérieure à $E(n/2)$.
11. Soit $E = \mathbb{C}^2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -Id$.
- 1- Montrer que toute valeur propre λ de u vérifie $\lambda^2 + 1 = 0$.
- 2- Montrer que u est semblable à l'une des matrices suivantes

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, -A = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Est-ce que B est semblable à $-B$?

12. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Donner un exemple de matrice $C \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $C^2 + Id = 0$.
13. Existe-t-il une matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ distincte de Id telle que $A^3 = Id$ et $A^2 \neq Id$?

14. On considère le matrice suivante de $M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -5/2 & -5/2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 5/2 & 5/2 & 11/2 \end{bmatrix},$$

Et les vecteurs

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

- 1- Ecrire la matrice des vecteurs (f_1, f_2, f_3) dans la base canonique et montrer que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$.
- 2- Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice de u dans la base (f_1, f_2, f_3) et en déduire le calcul de A^n si $n \in \mathbb{N}$.