Université de Strasbourg
Département de Mathématiques Année 2015/2016

L3- Algèbre S5

Feuille d'exercices 10

6.1 Déterminer toutes les structures d'anneaux possibles sur les ensembles à deux et trois éléments. (On pourra commencer par chercher les structures possibles de groupe abélien).

6.2 On considère le groupe additif $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$. On suppose que $\star$ est une multiplication sur ce groupe qui est commutative, associative, et distributive sur l'addition. L'élément $\overline{2}$ peut-il être élément neutre de $\star$? Déterminer toutes les structures d'anneau sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

6.3 On considère le groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On le munit d'une loi $\star$ qui en fait un anneau. On nomme ses éléments $0, 1, a, b$ (0 et 1 sont respectivement les éléments neutres pour $+$ et $\star$).

— Montrer que $a + b = 1$.

— On suppose qu'un des éléments, disons a, est de carré nul. Montrer qu'alors $ab = a$ et $b^2 = 1$.

— On suppose que a^2 et $b^2 \neq 0$ mais que $ab = 0$. Montrer qu'alors $a^2 = a$ et $b^2 = b$. Montrer que l'anneau obtenu est isomorphe à l'anneau produit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

— On suppose maintenant que a^2, b^2 et ab sont non nuls. Montrer qu'alors $a^2 = b$, $b^2 = a$ et $ab = 1$. Montrer que l'anneau obtenu est un corps.

— Montrer qu'il existe un unique (à isomorphisme près) corps à quatre éléments.

6.7 Anneaux de Boole. On dit qu'un anneau A est un *anneau de Boole* si, pour tout $x \in A$, on a $x^2 = x$. On ne suppose pas ici *a priori* que A est commutatif, ni qu'il est unitaire.

(a) Vérifier que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau de Boole.

(b) Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On reprend la loi Δ de l'exercice 1.2 :

$$A \Delta B = A \cup B - A \cap B,$$

pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Vérifier que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau de Boole.

(c) Soit A un anneau de Boole. Montrer que l'on a $x + x = 0$ pour tout $x \in A$.

(d) Montrer que tout anneau de Boole est commutatif.

(e) Soit A un anneau de Boole. Soient x et y des éléments de A. Calculer $xy(x + y)$. En déduire qu'un anneau de Boole ayant au moins trois éléments ne peut pas être intègre.

6.8 Soit A un anneau (commutatif mais pas nécessairement unitaire). On munit $B = A \times \mathbb{Z}$ des lois

$$(a, m) + (b, n) = (a + b, m + n) \text{ et } (a, m) \cdot (b, n) = (mb + na + ab, mn).$$

Montrer que B est un anneau (commutatif et unitaire).

6.12 On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ des nombres complexes de la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Soit U le sous-groupe des unités de $\mathbb{Z}[i]$.

(a) Montrer que l'application norme $N : U \to \mathbb{R}_+^*$ est un morphisme de groupes.

(b) Montrer que U est l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}[i]$ de norme 1.

6.14 Soit X un ensemble. On considère l'ensemble

$$\mathcal{F}(X) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$$

de toutes les applications de X dans $\mathbb{R}$, muni des lois $+$ et $\cdot$ induites par celles de $\mathbb{R}$. Vérifier que $(\mathcal{F}(X), +, \cdot)$ est un anneau.

(a) Montrer que cet anneau est intègre si X est réduit à un élement.

(b) Montrer que cet anneau n'est pas intègre si X est un ensemble de deux éléments distincts.

(c) Montrer que si X contient au moins deux éléments distincts alors cet anneau n'est pas intègre.

6.16 Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'anneau des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(0) = \emptyset$. Montrer que f est inversible dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Quel est son inverse ?

(b) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f^{-1}(0)$ contienne un intervalle ouvert $]a, b[$. Montrer que f est diviseur de zéro dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(c) (plus difficile). Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f^{-1}(0)$ ne contienne aucun intervalle ouvert $]a, b[$. Soit $a \in \mathbb{R}$, et $V = f^{-1}(\mathbb{R}^*)$. Montrer qu'il existe une suite x_n d'éléments de V qui converge vers a (on pourra procéder par l'absurde). En déduire que $fh = 0$, avec $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, implique que $h = 0$ et donc que f n'est pas diviseur de 0 dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

7.2 Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneau de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

7.6 Soit A un anneau (commutatif). Soit I un idéal de A. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $I = A$;

(b) I contient un élément inversible de A.

7.7 Soit A un anneau commutatif intègre. Soient a et b des éléments non nuls de A. On note (a) (resp. (b)) l'idéal de A engendré par a (resp. b). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) on a $(a) = (b)$;

(b) il existe un élément inversible $u \in A$ tel que $a = ub$.

7.8 Montrer que l'ensemble

$$I = \{P \in \mathbb{Z}[X] \mid P(0) \text{ est divisible par } 5\}$$

est un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$, contenant 5 et X. Montrer que l'idéal I n'est pas principal.