Université de Strasbourg
Département de Mathématiques

Année 2015/2016

L3- Algèbre S5

Feuille d'exercices 11

6.9 (a) Soient A un anneau commutatif, a et b dans A. Montrer que ab est inversible si et seulement si a et b le sont.

(b) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $A = \mathcal{L}(E)$ l'anneau des endomorphismes $\mathbb{R}$-linéaires de E. On considére $a \in A$ la dérivation $a(P) = P'$ et b l'application $\mathbb{R}$-linéaire définie pour tout $i \geq 0$ par

$$b(X^i) = \frac{X^{i+1}}{i+1}.$$

Montrer que $a \circ b = Id$ mais que ni a, ni b ne sont inversibles.

7.1 L'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par $P \mapsto P'(0)$ est-elle un homomorphisme d'anneaux ? Et l'application

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}[X] & \to & M(2; \mathbb{R}) \\ P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(0) & P'(0) \\ 0 & P(0) \end{pmatrix} \end{array}?$$

7.3 Soit A un anneau (pas nécessairement unitaire). Montrer que $(End(A, +), +, \circ)$ est un anneau (en général pas commutatif). Pour tout élément a de A, notons m_a l'application $x \mapsto ax$ de A vers A.

(a) Montrer que l'application $A \to End(A, +)$, $a \mapsto m_a$, est un morphisme d'anneaux.

(b) Montrer que si A est unitaire, ce morphisme est injectif.

(c) Donner des exemples où le morphisme $A \to End(A, +)$ défini ci-dessus est un isomorphisme.

(d) On considère l'anneau $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Montrer que l'application $\varphi : A \to A$ définie par $\varphi(a, b) = (b, a)$ est un morphisme d'anneau qui n'est pas dans l'image de l'application précédente.

7.9 Soit $A = \{m + in\sqrt{5} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.

(a) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

(b) Le but de cette question est de trouver les unités de A.

i. Montrer que si $a \in A$, alors $|a|^2 \in \mathbb{Z}$.

ii. Supposons que $a \in A$ est une unité, avec inverse b. Montrer que $|a|^2|b|^2 = 1$ puis que $|a|^2 = 1$.

iii. Trouver les unités de A.

(c) Montrer que si $ab = 2$ alors $a = \pm 1, \pm 2$.

(d) Soit $I = \{2a + b(1 + i\sqrt{5}) \mid a, b \in A\}$. Montrer que $I \subset A$ est un idéal. Montrer que $1 \notin I$ et en déduire que $I \neq A$.

(e) Montrer que I n'est pas un idéal principal.

On pourra raisonner par l'absurde et supposer que $I = (a)$. En utilisant le fait que $2 \in I$ et la question 0.0(c) on pourra alors déterminer les valeurs possibles de a et arriver à une contradiction.

7.14 Soit A un anneau. Un élément x de A est dit *nilpotent* s'il existe un entier $n > 0$ tel que $x^n = 0$. Soit x dans A. Montrer que si x est nilpotent, alors $1 - x$ est inversible (indication : calculer le produit $(1-x)(1+x+x^2+\cdots)$).

7.20 Soient A un anneau et a dans A. Notons $\varepsilon_a : A[X] \to A$ l'application $P \mapsto P(a)$ qui évalue P en a.

(a) Montrer que ε_a est un morphisme d'anneaux.

(b) Montrer que ε_a est surjectif.

(c) Montrer que $\mathrm{Ker}(\varepsilon_a)$ est l'idéal $(X - a)$ engendré par $X - a$, et que ε_a induit un isomorphisme de $A[X]/(X - a)$ vers A.

7.25 [Examen, septembre 2008] Soit A un anneau intègre commutatif. On suppose que A ne contient qu'un nombre fini d'idéaux.

Pour $a \in A$ un élément non nul et $n \in \mathbb{N}$, on considère I_n l'idéal engendré par a^n. Montrer que ces idéaux ne sont pas tous distincts. En déduire que a est inversible dans A et que A est un corps. Combien A a-t-il d'idéaux ?

8.8 Soit $\mathbb{F}_2$ le corps à deux éléments. Soit $L = \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$. Montrer que L est un corps à quatre éléments, et écrire ses tables d'addition et de multiplication. Vérifier que L est isomorphe au corps construit dans l'exercice 6.3.

8.83 (a) Soit K un corps de caractéristique 3. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{F}_3$ $(x+y)^3 = x^3+y^3$ (c'est le morphisme de Frobenius).

(b) Montrer que le polynôme $P(X) = X^2 - X + 2$ est irréductible sur $\mathbb{F}_3$. On considère $L = \mathbb{F}_3[X]/((X^2 - X + 2)\mathbb{F}_3[X])$. Justifier que L est un corps.

(c) Soit α la classe de X dans L, montrer que $\alpha^2 = \alpha - 2$, puis que $\alpha^6 = \alpha$. Comment interpréter ce calcul ?

(d) Factoriser P dans L.

8.85 (a) Soit $\mathbb{F}_3$ le corps à 3 éléments. Montrer que les polynômes $P(X) = X^3-X+1$ et $Q(X) = X^3-X+2$ sont irréductibles sur $\mathbb{F}_3$ et que $P(X+1) = P(X)$ (resp. $Q(X+1) = Q(X)$).

(b) Montrer que $L = \mathbb{F}_3[X]/(P(X)\mathbb{F}_3[X])$ est un corps isomorphe à $\mathbb{F}_9$.

(c) Soit α la classe de X dans L. Montrer que $P(\alpha) = 0$, que $Q(2\alpha) = 0$, et que $\alpha^9 = \alpha - 2$, puis que $\alpha^{27} = \alpha$. Comment interpréter ce dernier calcul ?

(d) Montrer que P et Q ont trois racines dans L (on pourra utiliser la question 2 de l'exercice).

8.12 Soit $F = X^3 + 3X - 2$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

(a) Montrer que $\mathbb{Q}[X]/(F)$ est un corps.

(b) Est-il isomorphe à un sous-corps de $\mathbb{R}$?

(c) Est-il isomorphe à un sous-corps de $\mathbb{C}$ non contenu dans $\mathbb{R}$?

(d) Combien F a-t-il de racines dans $\mathbb{Q}[X]/(F)$?

(e) Notons u la classe de X dans $\mathbb{Q}[X]/(F)$. Montrer que $(1, u, u^2)$ est une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}[X]/(F)$.

(f) Exprimer $(2u^2 + u - 3)(3u^2 - 4u + 1)$ et $(u^2 - u + 4)^{-1}$ dans cette base.