Université de Strasbourg — Année 2015/2016

Département de Mathématiques

L3- Algèbre S5

Feuille d'exercices 11

8.83 (a) Soit K un corps de caractéristique 3. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{F}_3$ $(x+y)^3 = x^3+y^3$ (c'est le morphisme de Frobenius).

(b) Montrer que le polynôme $P(X) = X^2 - X + 2$ est irréductible sur $\mathbb{F}_3$. On considère $L = \mathbb{F}_3[X]/((X^2 - X + 2)\mathbb{F}_3[X])$. Justifier que L est un corps.

(c) Soit α la classe de X dans L, montrer que $\alpha^2 = \alpha - 2$, $\alpha^4 = -1$ puis que $\alpha^9 = \alpha$. Comment interpréter ce calcul ?

(d) Montrer que P a deux racines dans L.

Correction : Si α est une racine de P. La somme des deux racines de P est 1 d'après les relations racines-coefficients, et donc $1 - \alpha$ est la deuxième racine de P dans L.

(e) Déterminer l'inverse de $(1 + \alpha)$ dans L.

Correction : On rappelle que

$$P(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow (X^2 - X + 2)|P(X).$$

En procédant comme pour l'exercice **8.12**, on voit que tout élément $\beta = P(\alpha)$ de L s'écrit d'une unique façon $a + b\alpha$ avec $a, b \in \mathbb{F}_3$. On cherche l'inverse β de $1 + \alpha$ sous la forme $\beta = a + b\alpha$. On calcule :

$$(a + b\alpha)(1 + \alpha) = a - 2b + (a + 2b)\alpha.$$

Et $\beta(1 + \alpha) = 1$ si et seulement si

$$\begin{cases} a - 2b &= 1 \\ a + 2b &= 0. \end{cases}$$

Comme $2^{-1} = 2$ dans $\mathbb{F}_3$, ce système a une unique solution $a = b = 2$, soit $(1+u)^{-1} = 2 + 2\alpha$. Ce qu'on peut vérifier directement :

$$(1+\alpha)(2+2\alpha) = 1.$$

(f) Montrer que le polynôme $X^2 + 1$ a deux racines dans L.

Correction : Comme $\alpha^4 = -1$ (question (c)), $\alpha^2 = \alpha - 2$ vérifie l'équation X^2+1. La deuxième racine de ce polynôme est donc $-\alpha^2 = -\alpha + 2$.