Université de Strasbourg — Année 2015/2016
Département de Mathématiques

L3- Algèbre S5

Feuille d'exercices 6

0.1 Vrai ou faux ?

(a) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(b) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ est isomorphe à $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

(c) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

(d) $(\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe à $(\mathbb{Q}, +)$.

(e) Il existe un morphisme de groupes f surjectif de $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

0.2 On se place dans le groupe diédral D_n (exercice 1.10). Montrer que le sous-groupe des rotations est distingué (par exemple en l'exhibant comme noyau d'un morphisme de groupes) mais que le sous-groupe engendré par une réflexion ne l'est pas.

0.3 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

0.4 Montrer que tous les endomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ (morphismes de ce groupe dans lui-même) sont de la forme $n \mapsto an$, pour un certain a dans $\mathbb{Z}$. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, déterminer si l'endomorphisme $n \mapsto an$ est injectif, surjectif, bijectif.

0.5 Déterminer le centre de $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ (et plus généralement de $\mathrm{GL}(n; K)$).

0.6 Soit n un entier strictement positif. La notation μ_n désigne le groupe multiplicatif des racines n-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

(a) Montrer que $\mu_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(b) Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\omega = exp(2ik\pi/n)$. A quelle condition sur k, ω engendre-t-il le groupe multiplicatif μ_n ? En ce cas on dit que ω est une racine primitive n-ième de l'unité

0.7 On considère dans cet exercice le cercle unité

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

(a) Montrer que S^1 est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

(b) Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est isomorphe à S^1 (indication : considérer le morphisme de groupes $x \mapsto \exp(2\pi i x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^*$).

(c) Montrer que $\mathbb{C}^*/S^1$ est isomorphe à $(\mathbb{R}_+^*, \cdot\,)$.

0.8 Dans tout l'exercice $\mathbb{Q}$ désigne le groupe additif $(\mathbb{Q}, +)$.

(a) Soit $G \subset \mathbb{Q}$ un sous-groupe avec $G \neq \{0\}$. Montrer que tout élément de $\mathbb{Q}/G$ est d'ordre fini.

(b) Montrer qu'il n'existe pas de groupes non-triviaux $G_1, G_2 \subset \mathbb{Q}$ tels que $G_1 \times G_2 \cong \mathbb{Q}$.

(c) Montrer qu'il n'existe pas de sous-ensemble fini $A \subset \mathbb{Q}$ tel que A engendre le groupe $\mathbb{Q}$.

0.9 Soient G un groupe, x, y, z dans G et $N \subset G$ un sous-groupe distingué tels que $x^5 \in N$, $y^7 \in N$ et $y^{-1}zxz^{-1} \in N$. Montrer que $x \in N$ et que $y \in N$. (Indication : calculer dans G/N quels peuvent être les ordres des classes de x et de y. Que peut-on tirer de $y^{-1}zxz^{-1} \in N$?)