Université de Strasbourg
Département de Mathématiques

Année 2015/2016

L3- Algèbre S5

Feuille d'exercices 7

4.25 Soit K un corps fini d'ordre q. En utilisant l'exercice **??**, montrer que le groupe $SL(n,K)$ est fini, d'ordre

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})}{q-1}.$$

4.31 Examen, septembre 2008. Soit $\varepsilon = \mathrm{S}_n \to \{\pm 1\}$ l'homomorphisme « signature ».

(a) Quel est son noyau ? Pour simplifier, on note N ce sous-groupe.

(b) Soit $\tau \in \mathrm{S}_n$ une transposition fixée. Montrer que $H = \{id, \tau\}$ est un sous-groupe de S_n.

(c) Montrer que la restriction de ε à H est un isomorphisme. Déterminer $N \cap H$.

(d) Montrer que tout élément $g \in \mathrm{S}_n$ peut s'écrire, de façon unique, sous la forme $g = nh$, avec $n \in N$ et $h \in H$.

4.33 Examen, janvier 2006. On munit l'ensemble $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de la loi de composition interne définie par

$$(m,n) \star (m',n') = (m + (-1)^n m', n + n').$$

(a) Montrer que $(G, \star)$ est un groupe (dont on précisera l'élément neutre et l'inverse de chaque élément). Ce groupe est-il commutatif ?

(b) On considère les parties

$$H = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{Z}\} \text{ et } K = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{Z}\}$$

de G. Montrer que H et K sont des sous-groupes et que chacun d'eux est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

(c) Montrer que l'application $G \to \mathbb{Z}$ qui à (m,n) associe n est un homomorphisme de groupes.

(d) Montrer que H est un sous-groupe distingué de G mais que K n'est pas distingué.

(e) À quel groupe bien connu le groupe quotient G/H est-il isomorphe ?

4.34 Groupe des rotations. On considère le groupe $O_n(n)$ défini par

$$O_n(n) = \{g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \,|\, {}^t g^{-1} = g\} \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}).$$

Montrer que

$$O_n^+(n) = \{g \in O_n(n) \mid \det(g) = 1\}$$

est un sous-groupe distingué de $O_n(n)$.

Déterminer tous les éléments de $O_n^+(2)$ et montrer que ce groupe est commutatif. En est-il de même de $O_n(2)$? De $O_n^+(n)$ pour $n \geq 3$?

4.37 Isométries d'un tétraèdre régulier. On considère, dans l'espace euclidien de dimension 3, un tétraèdre régulier $ABCD$. Montrer que toute isométrie qui préserve ce tétraèdre préserve l'ensemble de ses sommets. Soit G l'ensemble de toutes ces isométries. Montrer que G est un groupe, muni d'un morphisme

$$G \to \mathrm{S}_4$$

vers le groupe des permutations des quatre points A, B, C et D.

Montrer que ce morphisme est injectif (une isométrie est déterminée par les images des quatre sommets) et surjectif (toutes les permutations sont atteintes, par exemple parce que toutes les transpositions sont atteintes).

4.38 Isométries d'un cube. Dans un cube, on dessine, à l'aide des diagonales des faces, un tétraèdre $\mathcal{T}$ comme sur la figure. Vérifier que ce tétraèdre est régulier.

(a) Montrer qu'il y deux tétaèdres $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ réguliers sur le cube.

(b) Soit φ une isométrie qui préserve le tétraèdre $\mathcal{T}$. Montrer que φ préserve le cube et que ce sous-groupe est d'indice 2 (on pourra considérer l'action de φ sur les deux tétraèdres précédents).

(c) Combien le groupe des isométries du cube contient-il d'éléments ?

4.43 Soit $n \geq 2$ un entier. Soit α un automorphisme de S_n. Montrer que l'on a $\alpha(\mathrm{A}_n) = \mathrm{A}_n$.

4.49 Soient G et G' deux groupes, $f : G \to G'$ un morphisme de groupes, et H' un sous-groupe distingué de G'. On appelle $H = f^{-1}(H')$. Montrer que H est distingué dans G. Soit K un sous-groupe distingué de G. Montrer que $f(K)$ est un sous-groupe de G', mais qu'il peut très bien ne pas être distingué.

4.50 Soient m et n des entiers strictement positifs.

(a) Déterminer l'ensemble des morphismes $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(b) Déterminer $Aut(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

(c) Déterminer $Aut(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.