Université de Strasbourg — Année 2015/2016
Département de Mathématiques

L3- Algèbre S5

Feuille d'exercices 8 (quand les groupes opèrent ...)

5.1 Le groupe $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ opère sur $\mathbb{R}^n$ par $(A,x) \mapsto A\cdot x$. Montrer qu'il opère aussi sur l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^n$, par $(A,L) \mapsto A(L)$. Montrer que cette opération est transitive.

5.2 Donner la décomposition de $\mathbb{R}^2$ en orbites sous l'action du groupe des rotations $O_n(2)$. Déterminer le stabilisateur d'un point.

5.6 On se donne un ensemble X sur lequel agit un groupe fini d'ordre 156. On suppose qu'un élément $a \in X$ a un stabilisateur d'ordre 12. Quel est le cardinal de l'orbite de a ?

5.7 Soit G un groupe opérant sur un ensemble X. Supposons que $|X| = 108$ et que $|G| = 143$. Montrer que G fixe au moins un point de X.

5.11 Examen, janvier 2006. Soit K un corps. Le groupe $\mathrm{GL}(2;K)$ opère naturellement sur l'espace vectoriel K^2 (c'est-à-dire par $A \cdot X = AX$).

(a) Combien cette opération a-t-elle d'orbites ?

(b) On suppose désormais que $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que K a deux éléments. Combien d'éléments non nuls y a-t-il dans K^2 ? Montrer que le groupe $\mathrm{GL}(2;K)$ opère sur un ensemble à trois éléments, de façon que l'application $\mathrm{GL}(2;K) \to \mathrm{S}_3$ soit un isomorphisme de groupes.

5.12 Soient p un nombre premier et n un entier strictement positif. On considère un groupe fini G d'ordre p^n dont l'élément neutre sera noté e. Soit H un sous-groupe distingué de G tel que $H \neq \{e\}$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \alpha : G \times H &\to H \\ (g,h) &\mapsto ghg^{-1}. \end{aligned}$$

(a) Montrer que α définit une opération de G sur H.

(b) Montrer que, pour cette opération, l'orbite de tout élément de H a un cardinal de la forme p^k avec k entier et $0 \leq k \leq n-1$.

(c) En déduire que H contient un élément du centre de G distinct de e.

5.14 Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini X. On désigne par N le nombre de G-orbites. Pour tout $g \in G$, on pose $fix(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$. On se propose de démontrer la *formule de Burnside*

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |fix(g)|.$$

(a) Soient E et F des ensembles finis et $S \subset E \times F$. Pour tout $a \in E$ et pour tout $b \in F$, on pose

$$V_a = \{v \in F \mid (a, v) \in S\} \quad \text{et} \quad H_b = \{u \in E \mid (u, b) \in S\}.$$

Montrer que l'on a

$$\sum_{a \in E} |V_a| = \sum_{b \in F} |H_b|.$$

(b) Démontrer la formule de Burnside en appliquant le résultat de la question précédente à

$$S = \{(g, x) \in G \times X \mid gx = x\} \subset G \times X.$$