

## L3- Algèbre S5

### Feuille d'exercices 9

**4.43** Soient  $n \geq 2$  un entier et  $\alpha$  un automorphisme du groupe symétrique  $S_n$ . On note  $A_n$  le groupe alterné.

- (a) Montrer que toutes les transpositions sont conjuguées dans  $S_n$ .
- (b) Soit  $\sigma \in S_n$ ,  $C(\sigma)$  la classe de conjugaison de  $\sigma$  dans  $S_n$ . Montrer que  $\alpha(C(\sigma)) = C(\alpha(\sigma))$ .
- (c) Soit  $\tau$  une transposition de  $S_n$ . Montrer par l'absurde que  $\alpha(\tau) \notin A_n$ .
- (d) En déduire que  $\alpha(A_n) = A_n$ .

**4.50** Soient  $m$  et  $n$  des entiers strictement positifs.

- (a) Déterminer l'ensemble des morphismes  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
- (b) Déterminer  $\text{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ .
- (c) Déterminer  $\text{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

**4.51** Déterminer les ensembles de morphismes de groupes

- de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ ;
- de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ;
- de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ ;
- de  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**4.52** Combien de morphismes y a-t-il de  $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$  vers  $S_3$ ? Et de  $S_3$  vers  $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$ ?  
Et d'ailleurs, combien y a-t-il de morphismes de  $S_n$  dans  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ?

**4.53** Déterminer tous les morphismes de groupes de  $S_n$  dans  $\mathbb{C}^\times$ .

**4.54** Soit  $G$  un groupe fini tel que  $g^2 = e$  pour tout  $g \in G$ .

- (a) Montrer que  $G$  est commutatif.
- (b) Montrer que  $G$  admet un sous-groupe  $H$  d'ordre 2.

- (c) Montrer par récurrence sur le cardinal de  $G$  que  $|G|$  est d'ordre une puissance de 2.
- 5.8** Un groupe à 35 éléments opère sans point fixe sur un ensemble à 19 éléments. Combien y a-t-il d'orbites pour cette opération ?
- 5.9** Un groupe d'ordre 63 peut-il agir transitivement sur un ensemble de cardinal 27 ?