Corrigé du problème d'analyse complexe. S6 (Strasbourg)

C. Huyghe

2011

Les énoncés sont tirés du polycopié d'analyse complexe de Michèle Audin. Les figures ont été réalisées à l'aide du logiciel libre geogebra.

1. ex. I. 24.

   1- Par hypothèse, f coïncide avec la fonction analytique Id sur un ensemble de $\mathcal{U}$ possédant un point d'accumulation d'après le principe du prolongement analytique, sur un ouvert $\mathcal{U}$ connexe, de sorte que $\forall z \in \mathcal{U}$, $f(z) = z$, ce qui contredit le fait que

   $$f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}.$$

   Remarque : on peut aussi remarquer que la fonction $g(z) = f(z) - z$ est analytique et possède une suite de zéros ayant un point d'accumulation dans $\mathcal{U}$ connexe, donc $g = 0$.

   2- La fonction analytique $z \mapsto z^2$ convient.

2. ex. I. 39. On procède par condition nécessaire. Si $a_n = \alpha^n$, la relation de récurrence impose que α vérifie l'équation de degré 2,

   $$(F) \quad X^2 - u_1 X - u_2 = 0.$$

   Cette condition est suffisante.

   D'autre part on voit facilement que l'ensemble des suites vérifiant cette relation de récurrence est un espace vectoriel E. Si $(a_n) \in E$, on lui associe (a_0, a_1). Cette application est un isomorphisme de E sur $\mathbf{C}^2$, ce qui montre que E est de dimension finie égale à 2. Soient α et β les deux racines distinctes de l'équation (F), alors les suites (α^n) et (β^n) sont linéairement indépendantes, et forment donc une base de E.

   Si $(a_n) \in E$, on trouve les coefficients de la combinaison linéaire en écrivant $a_0 = A + B$ et $a_1 = A\alpha + B\beta$, soit

   $$A = \frac{a_1 - \beta a_0}{\alpha - \beta}$$
   $$B = \frac{\alpha a_0 - a_1}{\alpha - \beta}.$$

Soit $F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Alors

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n\geq 0} A\alpha^n z^n + \sum_{n\geq 0} B\beta^n z^n \\ &= \frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{1-\beta z}, \end{aligned}$$

ce qui est la décomposition en éléments simples. Le rayon de convergence de cette série est

$$min\left\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right\}.$$

3. ex. II. 18.

   1- L'image de l'axe réel est la demi-droite des réels positifs. La droite d'équation $y = c$ avec $c \neq 0$ un réel fixé est

   $$\{z \in \mathbf{C} \,|\, z = \lambda + ic,\ \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

   Si z est l'affixe d'un point de la droite,

   $$\begin{aligned} z^2 &= \lambda^2 - c^2 + 2i\lambda c \\ &= x + iy, \end{aligned}$$

   où

   $$(P) \quad x - \frac{y^2}{4c^2} + c^2,$$

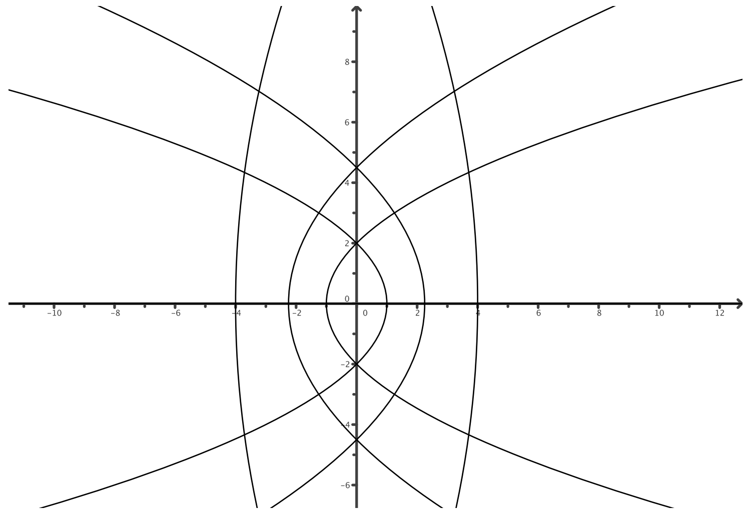
   ce qui est l'équation d'une parabole d'axe l'axe réel.

   Pour voir que l'image est toute la parabole, on remarque d'abord que l'image d'une droite est un ensemble connexe. Si $\lambda \to +\infty$ (resp. $-\infty$), $x \to +\infty$ et $y \to +\infty$ (resp. $y \to -\infty$). Ainsi, on voit que tous les points de la parabole sont images de points d'une droite parallèle à l'axe réel.

   2- L'image de l'axe des imaginaires est la demi-droite des réels négatifs. La droite d'équation $x = d$ est envoyée par $z \mapsto z^2$ sur la parabole d'équation

   $$x + \frac{y^2}{4d^2} - d^2.$$

   On montre comme précédemment que l'image est toute la parabole. Comme $z \mapsto z^2$ est holomorphe, les familles de paraboles s'intersectent avec des angles droites, puisque les droites parallèles à l'axe réel intersectent celles parallèles à l'axe imaginaire avec des angles droits.



4. ex. II. 19.

   1- L'image de l'axe réel par $sinz$ est le segment $[-1,1]$. Soit $c \neq 0$, et z un affixe d'un point de la droite d'équation $y = c$, alors $z = \lambda + ic$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. Posons

   $$chc = \frac{e^c + e^{-c}}{2}, \quad shc = \frac{e^c - e^{-c}}{2}$$

   les cosinus hyperbolique et sinus hyperboliques de c. On calcule

   $$\begin{aligned} sinz &= sin\lambda chc + i\, cos\lambda shc \\ &= x + iy. \end{aligned}$$

   En écrivant $cos^2\lambda + sin^2\lambda = 1$, on trouve l'équation

   $$\frac{x^2}{ch^2c} + \frac{y^2}{sh^2c} = 1,$$

   qui est l'équation d'une ellipse d'axes les axes de coordonnées, de grand axe chc et de petit axe shc. Il est facile de voir qu'on obtient toute l'ellipse.

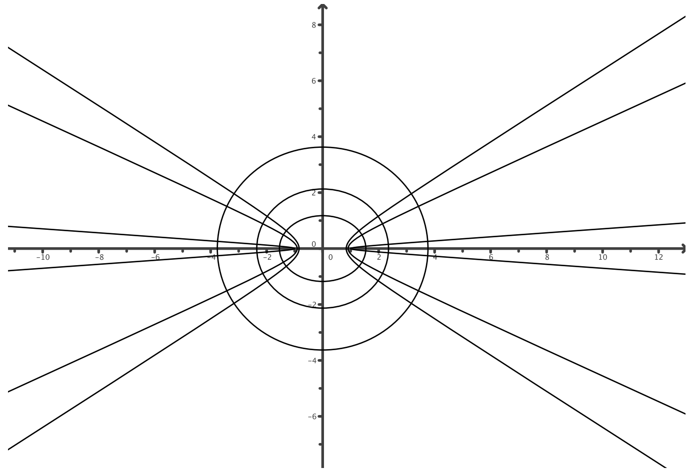
   2- L'image de l'axe imaginaire par $z \mapsto sinz$ est l'axe imaginaire. Si $d \in \mathbf{R}^*$ est fixé, et $z = d + i\lambda$,

   $$sinz = ch\lambda sind + i\, sh\lambda cosd,$$

   En écrivant la relation $ch^2\lambda - sh^2\lambda = 1$, on voit que l'image de la droite d'équation $x = d$ par $z \mapsto sinz$ est contenue dans l'hyperbole d'équation

   $$\frac{x^2}{sin^2d} - \frac{y^2}{cos^2d} = 1.$$

   Comme une droite est connexe, son image est une des branches de cette hyperbole. En procédant comme en 3a, on voit que c'est la branche de l'hyperbole correspondant à $x > 0$ si $sind > 0$ et à $x < 0$ si $sind < 0$.



3- La fonction g est définie sur $\mathbf{C}^*$. L'image par g du cercle unité est le segment $[-1, 1]$. Prenons l'image d'un cercle centré en l'origine de rayon $R > 0$ et $R \neq 1$. Si $z = Re^{it}$ avec $t \in \mathbf{R}$,

$$g(z) = \frac{1}{2}\left(Re^{it} + \frac{e^{-it}}{R}\right),$$

donne $g(z) = x + iy$ avec

$$x = \frac{1}{2\left(R + \frac{1}{R}cost\right)}, \quad y = \frac{1}{2\left(R - \frac{1}{R}sint\right)}.$$

On élimine t grâce à la relation $cos^2 t + sin^2 t = 1$ et on voit que $g(z)$ décrit l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = \frac{1}{4}.$$

On vérifie facilement que toute l'ellipse est atteinte.

On a $g(\mathbf{R}_*^+) = [1, +\infty[$ et $g(\mathbf{R}_*^-) =]-\infty, -1]$. Une demi-droite est déterminée par un vecteur unitaire $e^{i\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$ et on suppose $\alpha \neq 0[\pi]$. Si $z = te^{i\alpha}$, alors $g(z) = x + iy$ avec

$$x = \frac{1}{2}(t + t^{-1})cos\alpha, \quad y = \frac{1}{2}(t - t^{-1})sin\alpha.$$

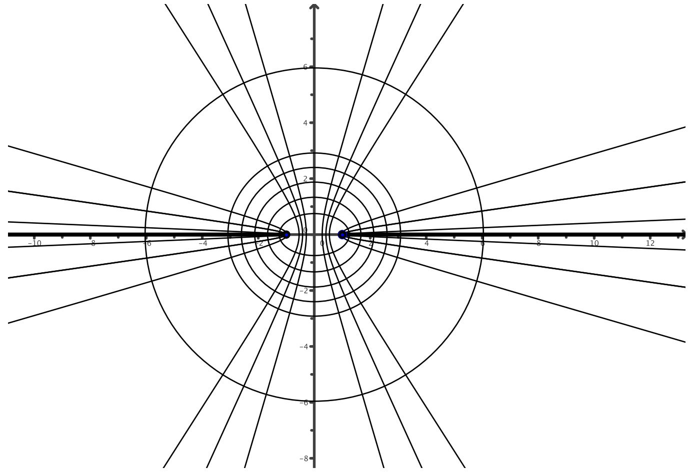
D'où l'on tire les relations

$$\begin{cases} sin\alpha x + cos\alpha y = & t sin\alpha cos\alpha \\ sin\alpha x - cos\alpha y = & t^{-1} sin\alpha cos\alpha \end{cases}$$

Finalement, en procédant comme au 3a, on voit que z décrit une branche de l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{cos^2\alpha} - \frac{y^2}{sin^2\alpha} = 1.$$

Précisément, la branche $x > 0$ si $cos\alpha > 0$ et la branche $x < 0$ si $cos\alpha < 0$.



Pour déterminer l'image du demi-plan de Poincaré

$$\mathcal{H} = \{z | Im(z) > 0\},$$

on résout l'équation $w = g(z)$ et on cherche les $w \in \mathbf{C}$ pour lesquels il existe un z solution dans $\mathcal{H}$. Cette équation s'écrit

$$z^2 - 2wz + 1 = 0.$$

Soient z_1, z_2 les deux solutions de cette équation. Alors $z_1 z_2 = 1$, donc si $Im(z_1) \neq 0$, alors $Im(z_2)$ est du signe opposé à $Im(z_1)$, de sorte que l'un des nombres z_1, z_2 est dans $\mathcal{H}$. Si maintenant $z_1 \in \mathcal{R}$, alors z_2 aussi car $z_1 z_2 = 1$, et

$$w = \frac{1}{2}\left(z_1 + z_1^{-1}\right),$$

car $z_1 + z_2 = 2w$. Comme $w = g(z_1)$, on voit que $w \geq 1$ ou $w \leq -1$. Dans ce cas, le discriminant de l'équation est > 0 et les deux solutions de l'équation sont réelles. Si $w \notin [1, +\infty[\bigcup] - \infty, -1[$, une des racines de l'équation considérée est dans $\mathcal{H}$. Ainsi, le domaine $V = g(\mathcal{H})$ est égal à

$$V = \mathbf{C} \backslash [1, +\infty[\bigcup \mathbf{C} \backslash] - \infty, -1].$$

Le discrimant de l'équation précédente est $4(w^2 - 1)$. Comme $w \notin [1, +\infty[$, l'équation $g(z) = w$ a une seule solution dans $\mathcal{H}$, puisque les parties imaginaires de deux solutions de cette équation ont des signes opposés et sont non nulles. Donc $g_{|\mathcal{H}}$ est injective. Enfin, soit h la détermination du logarithme sur $\mathbf{C} \backslash [0, +\infty[$ telle que $h(-1) = i\pi$. Notons $f(z) = exp(1/2h(z^2 - 1))$. Alors $f(0) = e^{i\pi/2}$. Si $z \in V$, $z^2 - 1 \notin [0, +\infty[$, de sorte que $f(z)$ est bien défini sur V. La fonction $k(z) = z + f(z)$ est continue sur V (et même holomorphe car c'est le cas de h sur son domaine de définition). Pour $z \in V$, $k(z) \in \mathcal{H}$ ou alors $k(z) \in -\mathcal{H}$. Comme V est connexe, l'image de V par k est contenu ou dans $\mathcal{H}$ ou dans $-\mathcal{H}$. Comme $k(0) = e^{i\pi/2} \in \mathcal{H}$, on voit que $k(V) \in \mathcal{H}$ et finalement

$$g^{-1}(z) = z + exp(1/2h(z^2 - 1)),$$

est l'application réciproque de g.

4- ex. II. 41. Lemme de Schwartz. Comme $f(0) = 0$ et f est holomorphe sur D, la fonction f admet un développement en séries de Taylor sur un voisinage V de 0 dont le coefficient constant est nul.

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n = z \sum_{n \geq 1} a_{n+1} z^n,$$

de sorte que

$$\frac{f(z)}{z} = \sum_{n \geq 1} a_{n+1} z^n,$$

est holomorphe sur V, donc en 0. Ainsi $f(z)/z$ est holomorphe sur D.

Soit $r \in]0,1[$. Appliquons le principe du maximum sur $\overline{D(0,r)}$, alors

$$\forall z \in \overline{D(0,r)}, \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq sup_{|z|=r} \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{r}.$$

Si on fixe z et qu'on fait tendre r vers 1, cela donne $\forall z \in \overline{D(0,r)}$, $|f(z)| \leq |z|$, et comme ceci est vrai pour tout $r \in]0,1[$, on trouve

$$\forall z \in D, \ |f(z)| \leq |z|.$$

Supposons qu'il existe z_0 tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$f(z_0) = e^{i\lambda} z_0,$$

alors si $r > |z_0|$, la fonction $g(z) = f(z)/z$ est holomorphe sur $D(0,r)$ atteint son maximum à l'intérieur du disque fermé $\overline{D(0,r)}$, ce qui, par le principe du maximum, implique que g est constante. Comme $g(z_0) = 1$, $g = 1$ sur $D(0,r)$ pour tout r assez grand et donc $g = 1$ sur $D(0,1)$, soit

$$\forall z \in \mathbf{Z}, \ f(z) = e^{i\lambda} z_0.$$

5- ex. II. 43. Automorphismes de D, le disque unité ouvert. On cherche les automorphismes de D, les applications bijectives holomorphes d'inverse holomorphe.

i. Soit f un automorphisme de D qui fixe 0. Alors d'après l'exercice précédent $\forall z \in D$, $|f(z)| \leq |z|$, et $|f^{-1}(f(z))| = |z| \leq |f(z)|$. Finalement, $\forall z \in D$, $|f(z)| = |z|$, donc on peut appliquer les conclusions de l'exercice précédent et

$$\exists \lambda \in \mathbf{R} | f(z) = e^{i\lambda} z.$$

ii. Soient $a, b \in \mathcal{C}$ tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$ et

$$f_{a,b}(z) = \frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}}.$$

Les pôles de $f_{a,b}$ sont les nombres complexes t vérifiant

$$t = -\frac{\overline{a}}{b}.$$

Alors

$$|t|^2 = 1 + \frac{1}{|b|^2} > 1.$$

Donc $f_{a,b}$ est holomorphe sur D.

Montrons que $|f_{a,b}(z)| < 1$ si $|z| < 1$. On a

$$|f_{a,b}(z)|^2 = \frac{|a|^2|z|^2 + |b|^2 + az\overline{b} + b\overline{az}}{|b|^2|z|^2 + |a|^2 + az\overline{b} + b\overline{az}} = \frac{u(z)}{v(z)}.$$

Comme $v(z) - u(z) = -|z|^2 + 1 > 0$, on a le résultat.

On calcule

$$f_{a,b}^{-1} = f_{\overline{a},-b}.$$

Comme $f \circ f^{-1} = Id$, f est surjective. Comme $f^{-1} \circ f = Id$, f est injective.

Remarquons enfin que $Id = f_{1,0}$, et que

$$f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{aa'+b\overline{b}',ab'+\overline{a}'b'}$$

de sorte que les applications $f_{a,b}$ forment un groupe pour la composition.

iii. On peut par exemple prendre

$$a = \sqrt{\frac{1}{1-|w|^2}}$$

et $b = -aw$.

iv. Soit f un automorphisme de D, $w = 0$, $g = f^{-1}$. Alors $g(w) = 0$. Considérons a et b tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$ et $f_{a,b}(w) = 0$, donc d'après la première question, $\exists\lambda \in \mathbf{R}$ tels que

$$f_{a,b}^{-1} \circ f = e^{i\lambda}z = f_{e^{i\lambda/2},0},$$

de sorte que

$$f = f_{a,b} \circ f_{e^{i\lambda/2}}$$

est bien du type $f_{c,d}$ avec $|c|^2 - |d|^2 = 1$.