Examen de M2 2007-2008

Durée 3h

C. Noot-Huyghe

Le cours, ainsi que le cours de O. Debarre, et les exercices portant sur le cours sont autorisés. Tout autre document ainsi que tout autre accessoire sont interdits (téléphone portable, machine à calculer, agenda électronique ...).

Pour traiter une question, on peut admettre le résultat des questions précédentes.

Dans tout l'examen, on adopte les conventions suivantes : si X est un schéma, $\mathcal{O}_X$ désigne le faisceau structural de ce schéma, Ω^1_X est le faisceau des formes différentielles de ce schéma. Si D est un diviseur de X, $\mathcal{L}(D)$ le faisceau inversible associé, alors $l(D) = dim(H^0(X, \mathcal{L}(D)))$.

Sauf mention explicite du contraire, une courbe sur un corps K est un schéma projectif lisse irréductible de dimension 1 sur $spec(K)$.

1. Soient p un nombre premier, $\mathbf{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques.
   1- Montrer que $\mathbf{Q}_p$ contient le groupe des racines $p-1$-ièmes de l'unité.
   2- Soit $\overline{f}$ un polynôme irréductible de $\mathbf{F}_p[X]$ de degré n et f un polynôme de $\mathbf{Z}_p[X]$ relevant $\overline{f}$. Montrer que f est irréductible.
   3- Soit $A = \mathbf{Z}_p[X]/f$. Montrer que la valuation de $\mathbf{Z}_p$ se prolonge à A en posant $v_p(aX^i) = v_p(a)$ pour $0 \leq i \leq n-1$ et $a \in \mathbf{Z}_p$ et que A est un anneau local complet pour cette valuation.
   4- Soit g un autre relèvement de f dans $\mathbf{Z}_p[X]$ et $B = \mathbf{Z}_p[X]/g$. Montrer que g a une racine dans A et que A et B sont isomorphes.
   5- Montrer que A contient les racines $p^n - 1$-ièmes de l'unité.
2. Soient K un corps de car. 0, Q un polynôme de degré $d > 0$ séparable, i.e. tel que Q et le polynôme dérivé Q' soient premiers entre eux. Soit U le sous-schéma ouvert $D(Q)$ de la droite affine $\mathbf{A}^1_K = spec(K[x])$.
   1- Décrire $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ comme sous-algèbre de $K(x)$.
   2- Montrer que Ω^1_U est un $\mathcal{O}_U$-module libre de rang 1 engendré par dx. Calculer $\Omega = \Gamma(U, \Omega^1_U)$.
   3- On considère le complexe de de Rham (DR) de U :
   $$0 \to A \xrightarrow{d} \Omega \to 0.$$
   1- Montrer que $H^0_{DR}(U) = Ker(d) = K$.
   On cherche maintenant à calculer $C = coker(d) = \Omega/Im(d)$.
   2- Montrer que
   $$\forall i \in \{0, \ldots, d-1\}, \quad \frac{x^i}{Q}dx \notin Im(d).$$
   Dans la suite, on introduit le K-espace vectoriel
   $$E = \bigoplus_{0 \leq i \leq d-1} K\frac{x^i}{Q}dx$$

et pour $n \in \mathbf{N}$, G_n le K-espace vectoriel

$$G_n = \left\{ \frac{f}{Q^n} dx \mid f \in K[x] \right\} \subset \Omega.$$

3- Montrer que $\Omega = \bigcup_{n \geq 0} G_n$, que, pour tout $n \geq 1$, $G_{n-1} \subset G_n$, et que

$$G_n = G_{n-1} + \sum_{0 \leq i \leq d-1} K \frac{x^i}{Q^n} dx.$$

4- Pour $0 \leq i \leq d-1$ soient a_i et b_i le quotient et le reste de la division euclidienne de $x^i Q'$ par Q, et $\overline{b_i}$ la classe de b_i dans $K[x]/Q$. Montrer que $(\overline{b_0}, \ldots, \overline{b_{d-1}})$ est une base du K-espace vectoriel $K[x]/Q$, puis que pour $n \geq 1$,

$$G_n = G_{n-1} + \sum_{0 \leq i \leq d-1} K \frac{b_i}{Q^n} dx.$$

5- Montrer que $G_n \subset E + Im(d)$ et que $H^1_{DR}(U)$ est un K-espace vectoriel de dimension d.

3. Soient K un corps de caractéristique $\neq 2$, $\lambda \in K^*$, $X = \mathbf{P}^1_K$ l'espace projectif sur K, de coordonnées projectives $[u_0, u_1]$, $n \in \mathbf{N}^*$ premier avec $car(K)$ et tel que $n-1$ est aussi premier avec $car(K)$. On considère pour $\lambda \in K^*$, l'application $f : \mathbf{P}^1_K \to \mathbf{P}^1_K$ définie en coordonnées projectives par $[u_0, u_1] \mapsto [u_0^n + \lambda u_0^{n-1} u_1, u_1^n]$. On introduira les notations $U_0 = D_+(u_0)$, $U_1 = D_+(u_1)$, $s = u_1/u_0 \in K(X)$, $0 = [1, 0]$, $\infty = [0, 1]$ et $t = s^{-1} \in K(X)$.

   1- Montrer que l'ouvert U_1 est stable par f, et que $f_{|U_1}$ est ramifié en au plus 2 points rationnels. Etudier la ramification en ∞ et montrer qu'elle est modérée (Indication : Etudier l'application $f^*\Omega^1_X \to \Omega^1_X$)).

   2- Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{O}_X(U_0)$ tel que f induit une application $D(h) \to U_0$. Montrer que f est modérément ramifié en 0. Soit $[0]$ le diviseur associé à 0. Calculer le diviseur $f^*([0])$. En déduire $deg(f)$.

   3- Calculer l'indice de ramification de f en le point de ramification distinct de 0 et de ∞.

4. Soit X une courbe sur un corps K et $f : X \to \mathbf{P}^1_K$ un morphisme fini séparable de degré n.

   1- Soit $P \in X(K)$ et $[P]$ le diviseur associé. Calculer $f^*([P])$ et le degré de ce diviseur.

   2- On suppose que f est étale sauf en les points de la fibre $f^{-1}(P)$ où f est modérément ramifié. Montrer que f est un isomorphisme.

   3- On suppose que f est étale en dehors de 0 et ∞ et que f est modérément ramifié au-dessus des points 0 et ∞. Montrer alors que X est isomorphe à $\mathbf{P}^1_K$.

5. Soit X une courbe hyperelliptique sur un corps K de caractéristique $\neq 2$, de genre g, $f : X \to \mathbf{P}^1_K$, définie par les données suivantes. On note $[u_0, u_1]$ les coordonnées projectives sur $\mathbf{P}^1_K$, $t = u_1/u_0$, $s = u_0/u_1$. La courbe X est réunion de 2 ouverts affines $U' = f^{-1}(D_+(u_0))$ et $V' = f^{-1}(D_+(u_1))$ avec

$$U' = spec(K[s, Y]/(Y^2 - P(s))) \quad V' = spec(K[t, Z]/(Z^2 - P_1(t)),$$

avec les relations sur $U' \bigcap V'$, $t = 1/s$, $P_1(t) = P(1/t)t^{2g+2}$, $y = s^{g+1}z$ où y est la classe de Y modulo $(Y^2 - P)$ (resp. z la classe de Z modulo $(Z^2 - P_1)$. On suppose que le polynôme P est de degré 5.

   1- Montrer que X est lisse si et seulement si $P \wedge P' = 1$ (on redémontrera le résultat du cours).

   2- A quoi est égal g ?

   3- Soient $\omega_0 = ds/2y$ et $\omega_1 = sds/2y$. Montrer que ω_0 engendre $\Omega^1_{U'}$ et que ω_1 engendre $\Omega^1_{V'}$.

4- Montrer que $\omega_0 = ds/2y$ et $\omega_1 = sds/2y$ forment une base de $H^0(X, \Omega^1_X)$ et que Ω^1_X est engendré par ses sections globales.

5- Montrer que l'application $\mathbf{A}^2_K \to \mathbf{A}^2_K$ donnée par $\sigma(s, Y) = (s, -Y)$ induit une involution de U' et une involution de $H^0(X, \Omega^1_X)$ que l'on déterminera.

6- Soit maintenant X une courbe projective quelconque sur un corps K, de genre $g \geq 2$. Calculer $dim(H^0(X, {\Omega^1_X}^{\otimes 3}))$ et donner sa valeur dans l'exemple précédent.

7- Montrer qu'on a une application canonique $Aut(X) \to H^0(X, {\Omega^1_X}^{\otimes 3})$. On suppose que cette application est injective et que K est fini, montrer alors que $Aut(X)$ est un groupe fini. Si K est un corps fini, la courbe hyperlliptique précédente vérifie toutes les hypothèses requises. Donner une borne pour le cardinal de $Aut(X)$.