Feuille d'exercices du cours de M2 2012

C. Noot-Huyghe

1-Théorie des faisceaux

1. Somme directe de faisceaux. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ 2 faisceaux sur un espace toplogique X. Montrer que le préfaisceau $U \mapsto \mathcal{F}(U) \bigoplus \mathcal{G}(U)$ est un faisceau et satisfait la propriété universelle de la somme directe dans la catégorie des faisceaux.(cf sous-section précédente)

2. Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques. Soient $\mathcal{F}$ un faisceau sur X, et $\mathcal{G}$ un faisceau sur Y. Montrer qu'il existe des applications naturelles $f^{-1}f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ et $\mathcal{G} \to f_*f^{-1}\mathcal{G}$.

   Utiliser ces applications pour montrer qu'il existe une bijection naturelle entre les ensembles
   $$Hom_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \text{ et } Hom_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$
   On dit que f^{-1} est adjoint à gauche de f_* et que f_* est adjoint à droite de f^{-1}.

2-Schémas

1. 1- Montrer qu'il existe un morphisme canonique f
   $$spec(\mathbf{C}[X] \to \mathbf{R}[X]).$$
   2- Expliciter les fibres de ce morphisme. Montrer qu'elles sont finies, de cardinal ≤ 2.

   3- Pour tout point P de $\mathbf{C}[X]$, et $Q = f(P)$, décrire les corps résiduels $k(P)$ et $k(Q)$ ainsi que l'extension $k(P) \hookrightarrow k(Q)$ induite par f.

2. 1- Décrire les fibres du morphisme canonique $spec(\mathbf{Z}[X]) \to spec(\mathbf{Z})$.

3. Soit X un schéma, pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_x$ le germe en x du faisceau structural, $k(x)$ le corps résiduel de cet anneau local. Soit K un corps. Montrer que se donner un morphisme de schémas : $specK \to X$ est équivallent à se donner un point x de X et une inclusion : $k(x) \to K$.

4. Soient X un schéma sur un corps k, ' $: k[T_1, \ldots, T_n] \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ un morphisme de k-algèbres et $f : X \to \mathbf{A}^n_k$ le morphisme induit par ' . On appelle point rationnel de X un morphisme : $speck \to X$ et on note $X(k)$ l'ensemble des points rationnels de X.

1- Montrer que $\mathbf{A}_k^n(k) \simeq k^n$,

2- Montrer que via l'identification donnée à la question précédente, on a $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, où $f_i = ' (T_i)$ et $f_i(x)$ est l'image de f_i dans $k(x) = k$.