1 TD1

1.1 Germes des fonctions méromorphes et monodromie

Notations

On note $\mathbb{C}\{z\}$ l'anneau de germes en 0 des fonctions holomorphes, autrement dit : $\mathbb{C}\{z\}$ est le sous-anneau de l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[z]]$, dont les éléments sont les séries avec rayon de convergence strictement positif.

On note $\mathcal{K}$ l'anneau des germes en zéro des fonctions méromorphes et $\partial = \frac{d}{dz}$. Lorsque on veut spécifier le nom de la variable on notera $\mathcal{K}_z$ (respectivement ∂_z) en lieu de $\mathcal{K}$ (resp. ∂). Pour $\varepsilon > 0$, on pose $D(0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\}$ et $D(0, \varepsilon)^* := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$.

Exercice 1.1.1. Montrer que $\mathcal{K}$ est un corps et $\mathcal{K} = \mathbb{C}\{z\}[\frac{1}{z}] = \text{Frac}(\mathbb{C}\{z\})$.

Exercice 1.1.2. Soit C une matrice inversible dans $M_{n,n}(\mathbb{C})$. Montrer que il existe une unique matrice Γ telle que $e^{2\pi i \Gamma} = C$ telle que toute valeur propre λ de Γ vérifie $-1 \leq \text{Re}(\lambda) < 0$.

Exercice 1.1.3. Trouver une équation différentielle linéaire homogène satisfaite par $\log(z)$. Trouver celle d'ordre minimale. Écrire le module à connexion méromorphe associé. On le note M_1 . Donner toutes les sections horizontales de ce module. Quelle est sa matrice de monodromie ?

Mêmes questions pour $z \log(z)$. On note M_2 le module à connexion associé. Quelle relation il y a entre M_1 et M_2 ?

Exercice 1.1.4. Considérons le revêtement $f: D(0, 1)^* \rightarrow D(0, 1)^*$, donnée par $x \mapsto x^2$. Pour simplifier on notera X le domaine de f et Y le co-domaine de f (même si $X = Y$!), t la variable de X et z la variable sur Y . L'application f induit une extensions de corps $\mathcal{K}_z \hookrightarrow \mathcal{K}_t$ envoyant le germe $g(z)$ de $\mathcal{K}_z$ en $g(t^2) \in \mathcal{K}_t$ (en écrira aussi abusivement " $z = t^2$ "). On considère le germe d'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}y(t) = 0, \quad y(t) \in \mathcal{K}_t$$

et on notera M le module à connexion (à coefficients dans $\mathcal{K}_t$) associé. Calculer le module à connexion f_*M et exhiber une équation différentielle linéaire associée. Calculer toutes les solutions (sections horizontales) de cette équation (module à connexion) sur le revêtement universel de $Y = D(0, 1)^*$. Calculer la matrice de monodromie.

Notations

On note $\tilde{D}_\varepsilon^* := \{t \in \mathbb{C} \mid |\exp(2\pi it)| < \varepsilon\}$ le revêtement universel de $D(0, \varepsilon)^*$ et on note $\tilde{\mathcal{O}}(\tilde{D}_\varepsilon^*)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur $\tilde{D}_\varepsilon^*$. On pose $\tilde{\mathcal{O}} := \varinjlim_{\varepsilon > 0} \tilde{\mathcal{O}}(\tilde{D}_\varepsilon^*)$. On note $\gamma: \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$, l'homomorphisme $u(t) \mapsto u(t+1)$.

Le $\mathcal{K}_z$ s'identifie à un sous-corps de $\tilde{\mathcal{O}}$ par $f(z) \mapsto f(\exp(2\pi it))$.

Exercice 1.1.5. 1. Montrer que $\tilde{\mathcal{O}}$ n'est pas un corps.

2. Montrer que $\ker(\gamma - 1) = \mathcal{K}_z$; calculer $\ker(\partial_t)$.

3. Montrer que $\partial_t \circ \gamma = \gamma \circ \partial_t$.

4. Quelle est la restriction de la dérivation $\frac{1}{2\pi i} \partial_t: \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ à $\mathcal{K}_z$?

Exercice 1.1.6. Soit $S \subset \tilde{\mathcal{O}}^n$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de solutions (multiformes) d'un système différentiel homogène de rang n

$$\partial \cdot Y = AY,$$

où $\partial = z \frac{d}{dz}$ et $A \in M_{n,n}(\mathcal{K}_z)$. On choisit une base $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ de S , on note C la matrice de monodromie et $\gamma_S: S \rightarrow S$ l'isomorphisme de monodromie. Dans les cas suivants, trouver des systèmes différentiels dont la monodromie est celle donnée. Puis trouver une base de solutions des ces systèmes.

1. $n = 1$, $\gamma_S = a \text{Id}_S$, $a \in \mathbb{C}^*$;

2. $n = 2$, $C = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{C}$;

$$3. n = 2, C = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}^* ;$$

$$4. n = 3, C = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}^*.$$

1.2 Polynômes différentiels

Soit (K, ∂) un anneau différentiel. Exemples :

- $K = \mathbb{C}\{z\}$, $\partial = \frac{d}{dz}$.
- $K = \tilde{\mathcal{O}}$, $\partial = \frac{d}{dt}$.
- $K = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$, $\partial = \frac{d}{dz}$.
- $K = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$, $\partial = z \frac{d}{dz}$.
- K est l'anneau des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\partial = \frac{d}{dz}$.
- K est le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ et $\partial = \frac{d}{dz}$.
- $K = C(z)$, avec C corps, et $\partial = \frac{d}{dz}$.
- $K = C((z))$, avec C corps, et $\partial = \frac{d}{dz}$.
- $K = C[[z]]$, avec C corps, et $\partial = \frac{d}{dz}$.

Lorsque K est un corps on dira corps différentiel.

Pour un anneau différentiel (K, ∂) on peut construire un anneau non-commutatif $K\langle \partial \rangle$ de la façon suivante : en tant que K -espace vectoriel

$$K\langle \partial \rangle := \left\{ \sum_{i=0}^r a_i \partial^i \mid \exists r \in \mathbb{N}, a_i \in K \right\};$$

et la multiplication est l'unique opération associative, distributive (par rapport à l'addition) et satisfaisant $\partial \cdot x = x\partial + \partial(x)$. Remarque : par construction K admet une structure de $K\langle \partial \rangle$ -module à gauche $*$: $K\langle \partial \rangle \times K \rightarrow K$ telle que $\partial * x = \partial(x)$.

Exercice 1.2.1. Montrer que tout élément $P = \sum_{i=0}^r a_i \partial^i \in K\langle \partial \rangle$ s'écrit de manière unique sous la forme $P = \sum_{i=0}^r \partial^i b_i$, avec $b_i \in K$.

Dans la suite on supposera $\mathbb{Q} \subset K$ et qu'il existe $z \in K$ tel que $\partial(z) = 1$.

Exercice 1.2.2. Pour $f, g \in K\langle \partial \rangle$, on pose $[f, g] := fg - gf$. Prouver les formules suivantes :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$[\partial, z^n] = nz^{n-1};$$

2. pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$[\partial^m, z] = m\partial^{m-1};$$

3. pour tout $j, k \in \mathbb{N}$,

$$\left[\frac{\partial^j}{j!}, z^k \right] = \sum_{i=1}^{\min(k, j)} \binom{k}{i} z^{k-i} \frac{\partial^{j-i}}{(j-i)!}.$$

Exercice 1.2.3. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$z^n \partial^n = \prod_{i=0}^{n-1} (z\partial - i).$$

Démontrer une formule analogue pour $\partial^n z^n$.

Exercice 1.2.4. Prouver dans $K\langle \partial \rangle$ l'égalité suivante :

$$\forall n \geq 0 \quad (\partial^2 z)^n = (n!)^2 \sum_{j=n}^{j=2n} \binom{j}{n} \binom{n+1}{j-n+1} z^{j-n} \frac{\partial^j}{j!}$$