Feuille d'exercices du cours de M2 2012

C. Noot-Huyghe

Composantes irréductibles de schémas

1. Soit k un corps.

   Soit $Y = V(y - x^2) \hookrightarrow \mathbf{A}^2_k$. Montrer que Y est irréductible et que $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ est isomorphe à $k[u]$. On dit alors que u est un paramètre de Y.

   2- Soit $Z = V(xy - 1)$. Montrer que Z est irréductible, et que $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ n'est pas isomorphe à $k[u]$. En déduire que Z n'est pas isomorphe à Y.

2. Soit k un corps.

   1- On considère le polynôme

   $$h(x, y, z) = x^3 + xy^2 + xz^2 - yx^2 - y^3 - yz^2.$$

   Montrer que $h(x, x, z) = 0$. En déduire que h n'est pas irréductible dans $k[x, y, z]$ (on pourra tenter de diviser h par le polynôme $x - y$).

   2- On considère $Z = V(h) \hookrightarrow \mathbf{A}^3_k$. Montrer que Z est réunion de deux composantes irréductibles qui sont respectivement une droite et une quadrique.

   3- Quel est le point générique de chaque composante irréductible ?

   4- Montrer qu'il existe un unique point t dans l'intersection de ces deux composantes tel que $x = y = 1$ et que $k(t)$ est de degré 2 sur k.

3. Soit k un corps. On considère la courbe

   $$Z = V((y - x^2)k[x, y, z] + (z - xy)k[x, y, z]) \hookrightarrow \mathbf{A}^3_k.$$

   Montrer que $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ est isomorphe à $k[u]$ et que Z est irréductible.

4. Soit k un corps. On considère la courbe

   $$Z = V((yz - x^2)k[x, y, z] + (xz - x)k[x, y, z]) \hookrightarrow \mathbf{A}^3_k.$$

   Montrer que Z a 3 composantes irréductibles. Donner le point générique de chaque composante et le corps des fonctions de chacune de ces composantes irréductibles (c'est-à-dire l'anneau local au point générique de chaque composante irréductible).