1 TD2 – Faisceaux localement constants et modules à connexion

Exercice 1.1. Soient $\mathcal{K} = \mathbb{C}\{z\}[\frac{1}{z}]$ et $\partial = \frac{d}{dz}$. Parmi les opérateurs différentiels suivants, lesquels sont singuliers réguliers en zéro ?

1. $\partial + z^2$;
2. $z\partial + 1$;
3. $z\partial + z$;
4. $z\partial + z^{-1}$;
5. $z\partial^2 + \partial$;
6. $z^{10}\partial^2 + \exp(z)$;
7. $z^{10}\partial^2$;
8. pour $n \in \mathbb{N}$, $z^n\partial^n + 1$;
9. pour $n \in \mathbb{N}$, $(z\partial)^n + 1$;
10. $P = (z\partial)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(z)(z\partial)^i$ avec $a_i(z) \in K$.

Exercice 1.2. Rappeler la définition de pré-faisceau constant et de faisceau constant sur un espace topologique X .

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$; on se donne des fonctions holomorphes $a_0(z), \dots, a_{r-1}(z)$ sur U . Montrer que les solutions de l'équation différentielle

$$y^{(r)} + \sum_{i=0}^{r-1} a_i(z)y^{(i)} = 0 \quad (\text{E})$$

forment un faisceaux localement constant sur U . Écrire le module à connexion $\nabla : M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega_{U/\mathbb{C}}^1$ associé à l'équation E.

Quel est le lien entre $\text{Ker}\nabla$ et l'équation E ?

Exercice 1.3. Soient $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes muni de la topologie usuelle et $X = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z|\}$, muni de la topologie induite. On note $\mathbb{C}_X$ le faisceau sur X constant de valeur $\mathbb{C}$ et $f : X \rightarrow X$ l'application $z \mapsto z^2$.

- (1) Calculer les fibres de l'image directe $f_*\mathbb{C}_X$ en tout point de X .
- (2) Calculer les sections globales de $f_*\mathbb{C}_X$.
- (3) Le faisceau $f_*\mathbb{C}_X$ est-il constant ?
- (4) Trouver des équations différentielles sur X dont les solutions soient respectivement $\mathbb{C}_X$ et $f_*\mathbb{C}_X$.

Exercice 1.4. Soient M_1 et M_2 les modules à connexion méromorphe correspondant respectivement aux équations différentielles de rang 1 :

$$y' = a_1y \quad \text{et} \quad y' = a_2y, \quad \text{avec} \quad a_1, a_2 \in K = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}].$$

Pour chacun des modules suivants : donner leur rang, écrire un système linéaire d'équations d'ordre 1 correspondant, puis écrire une équation différentielle linéaire homogène associée au système trouvé.

1. M_1^* ;
2. $M_1 \otimes M_2$;
3. $\text{Hom}(M_1, M_2)$;
4. $M_1 \oplus M_2$;
5. $(M_1 \oplus M_2)^{\otimes 2}$.