

Feuille d'exercices 3 du cours de M2 2012

C. Noot-Huyghe

1. Soit k un corps de caractéristique $p > 0$, $K = k(t)$ et X la courbe sur K définie par l'équation $y^2 = x^p - t$.
 - 1- Montrer que X est irréductible.
 - 2- Calculer $B = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.
 - 3- Montrer que si $p \neq 2$, X a un unique point fermé z singulier, correspondant à un idéal maximal \mathcal{M} de B . Quel est le degré de l'extension $[K(z) : K]$?
 - 4- Calculer la dimension du $K(z)$ espace vectoriel $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$.
 - 5- Donner une équation de la fermeture projective Y de X dans \mathbf{P}_K^2 et Donner les points singuliers de Y .
2. Soient k un corps parfait, C une conique de \mathbf{P}_k^2 définie par un polynôme homogène de degré 2 : $F(x, y, z)$ (notation : $C = V_+(F)$).
 - 1- Montrer que C est réduit (resp. irréductible) si et seulement si F n'est pas un carré modulo k^* (resp. est irréductible).
 - 2- On suppose désormais que C contient un point rationnel (i.e. un élément de $X(k)$).
 - i. Montrer que si P est un point singulier, alors C est isomorphe à un sous-schéma projectif du type $V_+(G)$ où G est un polynôme homogène de degré 2 de $k[x, y]$.
 - ii. On suppose que C est lisse au point P . Soit D une droite de \mathbf{P}_k^2 passant par P . Montrer que D rencontre C en un autre point rationnel Q . Montrer que C contient un 3e point rationnel R et que C est isomorphe à $V_+(ax^2 + yz)$. En déduire que C est réunion de 2 droites distinctes ou que C est isomorphe à \mathbf{P}_k^1 . Indication : on pourra considérer les droites tangentes à la courbe aux points P et Q .
 - 3- On suppose que $\text{char}(k) \neq 2$. Montrer que $C \simeq V_+(ax^2 + by^2 + cz^2)$ et montrer que C est lisse si et seulement si $abc \neq 0$.
3. Soit X le sous-schéma de l'espace projectif \mathbf{P}_Z^2 (muni des coordonnées homogènes $[x, y, z]$) défini par le polynôme homogène $xy - nz^2$ pour n un entier naturel. Déterminer la fibre de X au-dessus de tout nombre premier p , les composantes irréductibles de cette fibre. Trouver les singularités de cette fibre.