1 TD3 – Faisceaux localement constants et modules à connexion (suite)

Exercice 1.1. *Soient X un ouvert de $\mathbb{C}$ et M un $\mathscr{O}_X$-module localement libre de rang fini muni d'une connexion*

$$\nabla\colon M \to M \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^1_{X/\mathbb{C}}.$$

Soit $x_0 \in X$, on note $\pi_1(X, x_0)$ le groupe fondamentale.

(1) Rappeler la construction de la représentation de monodromie ρ associée à (M, ∇) et $x_0 \in X$.

(2) Supposons maintenant $X = D(0,\varepsilon)^* := \{z \in \mathbb{C} | \, 0 < |z| < \varepsilon\}$, pour $\varepsilon > 0$. Soient $\gamma\colon [0,1] \to X$ le lacet $\gamma(s) := \frac{\varepsilon}{2} e^{2\pi i s}$ et $x_0 = \gamma(0) = \gamma(1) = \frac{\varepsilon}{2}$; on note $[\gamma]$ sa classe d'homotopie dans $\pi_1(X, x_0)$. Montrer que $\rho([\gamma])$ est donnée par la matrice de monodromie C définie au début du cours (préciser dans quels sens).

Exercice 1.2. *Soit $X := \mathbb{C} \backslash \{0, \pm i, \pm i\sqrt{2}\}$ et $B := \mathbb{C} \backslash \{0, 1\}$. On note $p\colon X \to B$ l'application définie par $p(z) := (z^2+1)^2$. Montrer que p est revêtement. (cf. Polycopiés de A.Kraus pg. 59).*

Calculer l'image directe par p du module à connexion $(\mathscr{O}_X, d)$. Est-elle régulière en 0, 1 et ∞ ? Montrer qu'elle se décompose en facteurs directs de rang 1. Calculer ces facteurs.

Exercice 1.3. *(cf. exercice 5.7 dans M. van der Put, M. Singer, Galois Thory of Linear Differential Equation) On considère le système d'équations différentielles*

$$\left\{ \frac{dy}{dz} - \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{z - s_i} \cdot y = 0 \right. ,$$

où $A_i \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ et les s_i sont des nombres complexes distinctes. Écrire le D-module et le module à connexion méromorphe associé. Montrer que ∞ est un point singulier régulier. Montrer que $\sum_{i=1}^{k} A_i = 0$ implique que ∞ est régulier.