Feuille d'exercices no 4 du cours de M2 2012

C. Huyghe

1. Soit k un corps. Sur $X = \mathbf{P}^n_k$, on considère le faisceau des formes différentielles Ω^1_X. Montrer que
$$\Omega^1_X \simeq \mathcal{O}_X(-n-1).$$
2. Vérifier par un calcul à la Cech sur $X = \mathbf{P}^1_k$ la cohomologie du faisceau Ω^1_X.
3. **Automorphismes de l'espace projectif**. Soit k un corps. On rappelle que le groupe de Picard de $\mathbf{P}^n_k$, c'est-à-dire, le groupe des faisceaux inversibles sur $\mathbf{P}^n_k$ à isomorphisme près, est isomorphe à $\mathbf{Z}$ et engendré par $\mathcal{O}(1)$.
   1- Soit f un automorphisme de $\mathbf{P}^n_k$. Montrer que $f^*\mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{O}(1)$.
   2- Calculer $\Gamma(X, \mathcal{O}(1))$ par un calcul à la Cech et montrer que f induit un élément de $GL_{n+1}(k)$.
   3- Réciproquement, montrer que tout automorphisme du k-espace vectoriel $\Gamma(X, \mathcal{O}(1))$ induit un automorphisme de $\mathbf{P}^n_k$.
4. Soit k un corps, $F = x^n + y^n + z^n$, où n est premier à la car. de k. Soit $X = V_+(F) \subset \mathbf{P}^2_k$, muni des coordonnées homogènes $[x, y, z]$. Est-ce que X est lisse ? Déterminer $K(X)$ le corps des fonctions de X. Déterminer $\Gamma(X, \Omega^1_X)$.
5. 1- Soient m, n deux entiers naturels, $N = mn + m + n$, k un corps, $\mathbf{P}^n_k$ muni des coordonnées homogènes $[u_0, \cdots, u_n]$, $\mathbf{P}^m_k$ muni des coordonnées homogènes $[v_0, \cdots, v_m]$. Montrer qu'on peut définir
$$S : \mathbf{P}^n_k \times \mathbf{P}^m_k \to \mathbf{P}^N_k,$$
qui envoie le point de $\mathbf{P}^m_k(l) \times \mathbf{P}^n_k(l)$ de coordonnées $([u_0, \cdots, u_n], [v_0, \cdots, v_m])$ vers le point de coordonnées $[u_0v_0, u_0, v_1, \ldots, u_nv_m]$ dans l'ordre lexicographique, pour toute extension de corps l de k.
   2- Montrer que S est une immersion fermée. Il s'agit du plongement de Segre.
   3- Soit X un schéma sur $spec\, k$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ deux faisceaux amples inversibles sur X. Montrer que
$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$
est un faisceau ample inversible.
   4- Montrer que la surface d'équation $xy - zw = 0$ est l'image du plongement de Segre de $\mathbf{P}^1_k \times \mathbf{P}^1_k$ dans $\mathbf{P}^3_k$.