Interprétation cristalline de l'isomorphisme de Deligne-Illusie *

C. Huyghe et N. Wach

9 janvier 2017

Abstract

Let k be a finite field of characteristic $p > 0$ and X_0 a smooth variety over spec k with good reduction. In 1987, Deligne and Illusie proved the degeneration of the spectral sequence "de Hodge vers de Rham" in a purely algebraic way, by constructing a quasi-isomorphism at the level of derived categories between the de Rham complex of X_0 with a complex with 0 differentials. Simultaneously Fontaine and Messing constructed a divided Frobenius map on the crystalline complexes associated with X_0. We show that both morphisms of derived categories are compatible mod $p > 0$ if the dimension of X_0 is $< p - 1$. We use this compatibility to compute the (φ, Γ)-module *mod p* associated to the Drinfeld Curve.

Résumé

Soit k un corps fini de caractéristique $p > 0$ et X_0 une variété lisse sur spec k avec bonne réduction. En 1987, Deligne et Illusie ont démontré la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham d'une façon purement algébrique, en construisant un quasi-isomorphisme dans la catégorie dérivée entre le complexe de de Rham de X_0 et un complexe à différentielles nulles. Concomitamment, Fontaine et Messing ont construit un Frobenius divisé sur les complexes cristallins associés à X_0. Nous montrons que ces deux morphismes de catégories dérivées sont compatibles. Comme application de cette compatibilité, nous calculons le (φ, Γ)-module *mod p* associé à la courbe de Drinfeld.

Table des matières

*Les deux auteurs ont bénéficié du soutien du projet CETHop : ANR-09-JCJC-0048-01, coordonné par Xavier Caruso, projet de l'Agence Nationale de la Recherche.

MSC classification 2010 : 11S23, 14F30, 14F40

Introduction

Soient k un corps fini de caractéristique $p > 0$, $W = W(k)$, $S = \text{spec } W$, X un S-schéma propre et lisse sur S, et X_0 sa fibre spéciale. Fontaine-Messing ont construit en [FM87] un Frobenius divisé cristallin, construction généralisée par Breuil [Bre98] dans le cas log-cristallin. D'autre part, pour montrer la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham, Deligne et Illusie ont construit une flèche mod p en [DI87] qui fait aussi intervenir un Frobenius divisé. L'objet de cet article est de comparer la réduction mod p du Frobenius divisé cristallin de Fontaine-Messing et la construction de Deligne-Illusie, ce qui répond à une question tout à fait naturelle. L'intérêt du calcul de Deligne-Illusie est qu'il est algorithmique. En effet, ce morphisme est défini explicitement comme une flèche des complexes des modules des formes différentielles sur X_0 vers un complexe de Čech du complexe de de Rham de X_0, relatif à un recouvrement affine modulo p^2, sur lequel on dispose d'un relèvement du Frobenius. Ceci nous permet par exemple de calculer le (φ, Γ)-module *mod p* associé à la courbe de Drinfeld, en complétant ainsi des résultats de Haastert-Jantzen [HJ90] sur la cohomologie cristalline de ces courbes.

Voici le contenu de cet article. Nous donnons les notations dans la première partie. Dans la deuxième partie, nous rappelons les constructions cristallines usuelles ainsi que la construction du Frobenius divisé de Fontaine-Messing, précisée par Kato [Kat87]. Dans la troisième partie, nous établissons le théorème de comparaison en comparant d'abord la construction de Deligne-Illusie et celle de Fontaine-Messing en degré $k = 1$. Dans ce cas, le calcul du Frobenius cristallin se fait par descente cohomologique. La construction de Deligne-Illusie est multiplicative à partir du cas $k = 1$. Le reste de la démonstration consiste à observer que la construction du Frobenius divisé cristallin est elle aussi multiplicative. C'est facile à faire sur un schéma muni d'un relèvement du Frobenius et pour obtenir le cas général on s'y ramène par descente cohomologique. Nous pouvons alors déduire le cas de degré quelconque $\leq p-2$ du cas de degré $k = 1$. Dans la quatrième partie nous passons aux applications cohomologiques dans le cas où X est projectif et montrons que après passage à la cohomologie, le morphisme de Deligne-Illusie coïncide mod p avec le Frobenius divisé de Mazur. Dans la cinquième partie, nous appliquons le résultat précédent pour décrire le (φ, Γ)-module mod p associé à la courbe X de Drinfeld, qui correspond à la représentation galoisienne $H^1_{et}(X_{\overline{\mathbf{Q}}_p}, \mathbf{Q}_p)$, via l'algorithme de Wach [Wac97].

Enonçons à présent les principaux résultats de cet article. Désignons par X'_0 le changement de base de X_0 par le morphisme de Frobenius de $\text{spec } k \to \text{spec } k$, DR_{X_0} le complexe de de Rham de X_0, les faisceaux cristallins sont définis en 1. Le théorème de comparaison 3.1.1 se résume dans le fait que le diagramme suivant de faisceaux dans la catégorie dérivée des faisceaux de $\mathcal{O}_{X'_0}$-modules est commutatif

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{k=0}^{p-2} Ru_{X'_0*}\mathcal{J}^{[k]}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X'_0/S_0} \arrow[r, "\Phi_{cris}"] \arrow[d, "can"'] & \sigma_{\leq p-2}F_*Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0} \arrow[d, "can"'] \\ \bigoplus_{k=0}^{p-2} \Omega^k_{X'_0}[-k] \arrow[r, "DI"] & \sigma_{\leq p-2}F_*DR_{X_0}, \end{tikzcd}$$

dont la flèche horizontale du haut est le Frobenius divisé cristallin, et celle du bas est le morphisme de Deligne-Illusie.

Dans le cas où X est projectif de dimension $\leq p-2$, et vérifie la condition de Mazur 18, nous déduisons en 4.1 que le morphisme $R^n\Gamma \circ DI$ est égal au Frobenius divisé de Mazur pour tout $n \leq 2\,dim\,X$:

$$R^n\Gamma \circ DI = \overline{\Phi}_M : \bigoplus_{i=0}^{n} H^{n-i}(X'_0, \Omega^i_{X'_0}) \xrightarrow{\sim} DR_{X_0}.$$

Dans la dernière partie, nous décrivons comment utiliser ces résultats pour décrire le (φ, Γ)-module associé aux courbes de Drinfeld d'équation pour q une puissance de p

$$XY^q - X^qY - Z^{q+1} = 0$$

dans $\mathbf{P}^2$. Nous donnons un algorithme de calcul en 5.2.6. En particulier, nous montrons le résultat suivant : si $q = p$, l'action de Γ est semi-simple et tous les irréductibles sont de dimension 2 et l'algorithme donné en fin de l'article permet de déterminer explicitement ces représentations mod. $p > 0$.

Le fait que notre résultat de comparaison soit valable en toute dimension laisse penser que l'on doit pouvoir l'utiliser pour calculer explicitement des (φ, Γ)-modules provenant que la cohomologie étale p-adique d'hypersurfaces, dont on parvient à calculer la cohomologie de de Rham à la Cech mod. $p > 0$.

Nous tenons à remercier, pour avoir répondu avec gentillesse et précision à nos questions concernant ce sujet : Christophe Breuil, Jean-Marc Fontaine, Luc Illusie et Arthur Ogus. Nous remercions aussi Michel Gros de nous avoir signalé l'article de Haastert-Jantzen [HJ90], ainsi que Pierre Berthelot et Bernard le Stum pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail. Nous remercions aussi le referee de cet article pour ses remarques constructives.

1 Notations

Rappelons que p est un nombre premier différent de 2, k est un corps fini de caractéristique $p > 0$. Nous noterons $W = W(k)$, $W_n = W/p^nW$, $S = \text{spec}\, W$, $S_0 = \text{spec}\, k$, $S_n = \text{spec}\, W_{n+1}$. Dans ce texte, X est un schéma lisse sur S, dont la fibre spéciale est X_0.

Pour tout S-schéma Y, Y_n sera le schéma $Y_n = \text{spec}\, S_n \times_S Y$.

Etant donné une immersion fermée $\alpha_n : X_n \hookrightarrow Y_n$ de X_0 dans un S_n-schéma lisse Y_n, nous noterons $\mathcal{P}(Y_n)$ l'enveloppe à puissances divisées de l'idéal de cette immersion, $\mathcal{J}_{Y_n}$ le faisceau de PD-idéaux de $\mathcal{P}(Y_n)$ et P_{Y_n} le spectre de $\mathcal{P}(Y_n)$. Le faisceaux d'algèbres $\mathcal{P}(Y_n)$ est filtrée par les puissances divisées du faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_{Y_n}$: $\mathcal{J}_{Y_n}^{[k]}$ est l'idéal engendré par les éléments $x_1^{[a_1]} \cdots x_r^{[a_r]}$ tels que les entiers naturels a_i vérifient $a_1 + \ldots + a_r \geq k$. En particulier, on a l'égalité $\mathcal{J}_{Y_n} = \mathcal{J}_{Y_n}^{[1]}$. On omettra le Y_n en indice quand le contexte sera clair.

Nous serons amenés à considérer dans la suite les sites cristallins X_n/S_n (ou X_n/S_n), dont on notera $\mathcal{O}_{X_n/S_n}$ le faisceau structural, défini par

$$\mathcal{O}_{X_n/S_n}(T) = \mathcal{O}_T,$$

si $U \hookrightarrow T$ est un épaississement de U, c'est-à-dire une immersion fermée définie par un idéal à puissances divisées (PD-idéal) $J_U = Ker(\mathcal{O}_T \twoheadrightarrow \mathcal{O}_U)$. Ces idéaux forment le faisceau de PD-idéaux $\mathcal{J}_{X_n/S_n}$. On notera $\mathcal{J}_{X_n/S_n}^{[k]}$ le k-ième terme de la filtration PD-adique décrite ci-dessous et on notera u_{X_n} la projection sur le site zariskien

$$(X_n/S_n)_{cris} \to (X_n/S_n)_{Zar}.$$

La lettre grecque σ désignera à la fois le Frobenius sur k, et aussi son relevé sur W ou W_n pour tout $n \geq 0$. Si Y_0 est un k-schéma, F_{Y_0} sera le Frobenius absolu sur Y_0, $Y_0' = Y_0 \times_{spec\, k} spec\, k$, le changement de base par le Frobenius sur k, et F sera le Frobenius relatif habituel : $Y_0 \to Y_0'$. De façon abusive, nous noterons aussi F le morphisme induit par $F : F^{-1}\mathcal{O}_{Y_0'} \to \mathcal{O}_{Y_0}$. En général, si Y_n est un schéma sur S_n, Y_n' sera le produit fibré par le morphisme σ :

$$Y_n' = Y_n \times_{S_n} S_n.$$

Un relèvement du Frobenius sur Y_n (resp. sur Y un S-schéma) sera la donnée d'un morphisme encore noté F de S_n-schémas (resp. S-schémas), dont la réduction modulo p est le Frobenius relatif $F : Y_0 \to Y_0'$.

Si $\mathcal{E}$ est un faisceau de W_{n+1}-modules libres sur un S_n-schéma, on notera m_p (resp. m_p^{-1}) l'isomorphisme de multiplication par p, $m_p :\ \mathcal{E}/p^n\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p \cdot \mathcal{E}$, (resp. m_p^{-1} son isomorphisme inverse). Si u est un morphisme de faisceaux W_{n+1}-linéaire : $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$, le diagramme suivant est bien entendu commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}/p^n\mathcal{E} \arrow[r, "\sim", "m_p"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & p \cdot \mathcal{E}, \arrow[d, "u"] \\
\mathcal{F}/p^n\mathcal{F} \arrow[r, "\sim", "m_p"'] & p \cdot \mathcal{F},
\end{tikzcd}$$

ce qui revient à dire que $m_p^{-1} \circ u = u \circ m_p^{-1}$.

Si Y est un S-schéma (resp. S_n-schéma), on notera Ab_Y la catégorie des faisceaux de groupes abéliens pour la topologie Zariski sur Y et $D^b(Ab_Y)$ la catégorie dérivée des complexes à cohomologie bornée des faisceaux de Ab_Y. On notera aussi $D^b(\mathcal{O}_Y)$ la catégorie dérivée des complexes à cohomologie bornée des faisceaux de $\mathcal{O}_Y$-modules cohérents.

Les conventions pour les complexes (indexés par $\mathbf{Z}$) sont les suivantes : si $K^\bullet$ est un complexe de modules, et $a \in \mathbf{Z}$, alors $(K^\bullet[a])^j = K^{j+a}$. Le tronqué cohomologique $\sigma_{\leq a} K^\bullet$ est le complexe :

$$\cdots \to K_{a-1} \to K_a \to Ker(d_{a+1}) \to 0 \cdots .$$

Soient maintenant $K^{\bullet,\bullet}$ un bi-complexe de modules tel que $K^{i,j} = 0$ si $i \leq i_0$ et $j \leq j_0$ pour un certain couple (i_0, j_0), et dont les différentielles horizontales et verticales sont notées respectivement d' et d''. Alors le complexe simple associé sera noté $[K^{\bullet,\bullet}]_s$ et a pour terme général $[K^{\bullet,\bullet}]_s{}^n = K^n = \bigoplus_{i+j=n} K^{i,j}$ et pour différentielle pour $x \in K^{i,j}$, $d(x) = d'(x) + (-1)^i d''(x)$.

Soient $(K_1^\bullet, d_1), \ldots, (K_k^\bullet, d_k)$ k complexes de A-modules libres où A est un anneau commutatif, alors on notera

$$K_1^\bullet \otimes_A^{\mathbf{L}} \cdots \otimes_A^{\mathbf{L}} K_k^\bullet$$

le complexe de n-ième terme général

$$\bigoplus_{a_1+\cdots+a_k=n} K_1^{a_1} \otimes_A \cdots \otimes_A K_k^{a_k},$$

dont la différentielle est donnée pour $x_1 \in K_1^{a_1}, \ldots, x_k \in K_k^{a_k}$ par

$$\begin{aligned} d(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = d_1(x_1) \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_k + (-1)^{a_1} x_1 \otimes d_2(x_2) \otimes \cdots \otimes x_k \\ + (-1)^{(\sum_{i=1}^{k-1} a_i)} x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_{k-1} \otimes d_k(x_k). \end{aligned}$$

2 Rappel de la construction du Frobenius divisé cristallin

Cette application a été définie par Fontaine-Messing [FM87], et nous utiliserons la version qu'en donne Kato au niveau des résolutions [Kat87], 1 du chapitre I, ce qui donnera donc le calcul du Frobenius divisé sur la cohomologie cristalline.

2.1 Réalisations cristallines

Dans cette partie X_n désigne un schéma lisse quelconque sur S_n. On se donne deux S_n-schémas lisses Y_n et Z_n, ainsi que des plongements $\alpha_n : X_n \hookrightarrow Y_n$, $\beta_n : X_n \hookrightarrow Z_n$, un S_n-morphisme $h : Z_n \to Y_n$ tels que le diagramme suivant de S_n-schémas soit commutatif

$$\begin{tikzcd} & Z_n \arrow[d, "h"] \\ X_n \arrow[ur, hook, "\beta_n"] \arrow[r, hook, "\alpha_n"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", shift right=3] & Y_n, \end{tikzcd} \tag{1}$$

Des plongements α_n et β_n, on déduit des plongements $\alpha_{n'} : X_{n'} \hookrightarrow Y_{n'}$ et $\beta_{n'} : X_{n'} \hookrightarrow Z_{n'}$ pour tout entier $n' \leq n$.

Définition 2.1.1. *On appelle réalisation (sur Y_n) de $Ru_{X_n *}\mathcal{O}_{X_n/S_n}$ tout complexe de $D^b(Ab_{Y_n})$ qui est quasi-isomorphe à $Ru_{X_n *}\mathcal{O}_{X_n/S_n}$.*

On remarquera que ces faisceaux en groupes abéliens sur Y_n sont à support sur X_0, car c'est le cas des faisceaux de PD-enveloppes $\mathcal{P}(Y_n)$. Considérons la réalisation de $Ru_{X_n*}\mathcal{O}_{X_n/S_n}$ suivante

$$\mathcal{E}_{Y_n} \ : \ 0 \to \mathcal{P}(Y_n) \to \mathcal{P}(Y_n) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^1_{Y_n} \to \cdots \to \mathcal{P}(Y_n) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^N_{Y_n} \to 0, \tag{2}$$

dont la différentielle est obtenue à partir du fait que $d(x^{[a]}) = x^{[a-1]}dx$ pour toute section locale x du faisceau d'idéaux à puissances divisées $\mathcal{J}$ de $\mathcal{P}(Y_n)$. On obtient ainsi un quasi-isomorphisme *can* : $Ru_{X_n*}\mathcal{O}_{X_n/S_n} \overset{\sim}{\to} \mathcal{E}_{Y_n}$. Remarquons que $\mathcal{E}_{X_n}$ est le complexe de de Rham DR_{X_n}.

On a une flèche canonique $h^*\mathcal{E}_{Y_n} \to \mathcal{E}_{Z_n}$, donnée par les morphismes canoniques $h^*\Omega^q_{Y_n} \to \Omega^q_{Z_n}$ et $h^*\mathcal{P}(Y_n) \to \mathcal{P}(Z_n)$. Dans $D^b(Ab_{Y_n})$ on dispose d'un quasi-isomorphisme de complexes *can* : $Ru_{X_n*}\mathcal{J}^{[k]}_{X_n/S_n} \overset{\sim}{\to} \mathcal{L}^{[k]}_{Y_n}$, où $\mathcal{L}^{[k]}_{Y_n}$ est le complexe de faisceaux Zariski sur X_n,

$$\mathcal{L}^{[k]}_{Y_n} \ : \ 0 \to \mathcal{J}^{[k]} \to \mathcal{J}^{[k-1]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^1_{Y_n} \to \cdots \to \mathcal{J}^{[k-N]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^N_{Y_n} \to 0. \tag{3}$$

De même que précédemment, la donnée de ces complexes est fonctorielle en le plongement $X_n \hookrightarrow Y_n$.

Nous noterons de plus $\mathcal{M}^{[k]}_{Y_n}$ le quotient à support dans X_n

$$\mathcal{M}^{[k]}_{Y_n} = \mathcal{L}^{[k]}_{Y_n} \Big/ \mathcal{L}^{[k+1]}_{Y_n} \ ,$$

c'est-à-dire le complexe

$$\mathcal{M}^{[k]}_{Y_n} \ : \ 0 \to \mathcal{J}^{[k]}/\mathcal{J}^{[k+1]} \to \mathcal{J}^{[k-1]}/\mathcal{J}^{[k]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^1_{Y_n} \to \cdots \to \mathcal{J}^{[k-N]}/\mathcal{J}^{[k-N+1]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^N_{Y_n} \to 0. \tag{4}$$

Remarquons que d'après 5.2 de [BO78]

$$\mathcal{O}_{X_n/S_n}/\mathcal{J}^1_{X_n/S_n} = i_{X_n/S_n*}\mathcal{O}_{X_n}. \tag{5}$$

Le lemme suivant donne une résolution du faisceau $Ru_{X_n*}\mathcal{J}^{[k]}_{X_n/S_n}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X_n/S_n}$ (1).

Lemme 2.2. *Pour tout entier k, il existe un quasi-isomorphisme de complexes*

$$can \ : \ Ru_{X_n/S_n*}(\mathcal{J}^{[k]}_{X_n/S_n}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X_n/S_n}) \overset{\sim}{\to} \mathcal{M}^{[k]}_{Y_n}.$$

Démonstration. Ce résultat provient du chapitre 6 de [BO78], et plus particulièrement du lemme de Poincaré filtré cristallin. Introduisons le faisceau linéarisé filtré de loc. cit.

$$F^kL(\Omega^q_{Y_n}) = \mathcal{J}^{[k-q]}(\mathcal{P}(Y_n) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \mathcal{P}(Y_n) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^q_{Y_n}).$$

On se reportera à loc. cit. pour voir que ces faisceaux définissent des faisceaux sur $(X_n/S_n)_{cris}$, acycliques pour le foncteur u_{X_n*} et vérifient

$$u_{X_n*}(F^kL(\Omega^q_{Y_n})) \simeq \mathcal{J}^{[k-q]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^q_{Y_n}.$$

De plus, par le lemme de Poincaré filtré cristallin, on a un quasi-isomorphisme de faisceaux sur $(X_n/S_n)_{cris}$
$$\mathcal{J}^{[k]}_{X_n/S_n} \simeq F^k L(\Omega^\bullet_{Y_n}).$$
En appliquant la longue suite exacte de cohomologie, on trouve que les faisceaux $F^k L(\Omega^q_{Y_n})/F^{k+1} L(\Omega^q_{Y_n})$ sont acycliques pour le foncteur u_{X_n*}, de sorte que l'on a une résolution acyclique dans $(X_n/S_n)_{cris}$
$$\mathcal{J}^{[k]}_{X_n/S_n}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X_n/S_n} \simeq F^k L(\Omega^\bullet_{Y_n})/F^{k+1} L(\Omega^\bullet_{Y_n}).$$
On a de plus,
$$\begin{aligned} u_{X_n*}\left(F^k L(\Omega^q_{Y_n})/F^{k+1} L(\Omega^q_{Y_n})\right) &\simeq u_{X_n*}(F^k L(\Omega^q_{Y_n}))/u_{X_n*}(F^{k+1} L(\Omega^q_{Y_n})) \\ &\simeq \mathcal{J}^{[k-q]}/\mathcal{J}^{[k+1-q]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^q_{Y_n}. \end{aligned}$$
On calcule donc
$$\begin{aligned} Ru_{X_n*}(\mathcal{J}^{[k]}_{X_n/S_n}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X_n/S_n}) &\simeq u_{X_n*}\left(F^k L(\Omega^\bullet_{Y_n})/F^{k+1} L(\Omega^\bullet_{Y_n})\right) \\ &\simeq \mathcal{J}^{[k-\bullet]}/\mathcal{J}^{[k+1-\bullet]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^\bullet_{Y_n} \\ &\simeq \mathcal{M}^{[k]}_{Y_n}, \end{aligned}$$
ce qui donne l'énoncé voulu. □

Il suit de la proposition 1.5.3 de [Ber96] que les complexes $\mathcal{E}_{Y_n}$, $\mathcal{M}^{[k]}_{Y_n}$, (resp. $\mathcal{L}^{[k]}_{Y_n}$) sont à termes plats sur W_n, ce qui implique le lemme suivant qui sera surtout utile dans le cas $n' = 0$.

Lemme 2.3. *Soit $n' \leq n$, alors*
$$W_{n'} \otimes^{\mathbf{L}}_{W_n} \mathcal{E}_{Y_n} \simeq \mathcal{E}_{Y_{n'}}$$
$$W_{n'} \otimes^{\mathbf{L}}_{W_n} \mathcal{M}^{[k]}_{Y_n} \simeq \mathcal{M}^{[k]}_{Y_{n'}} \text{ (resp. pour } \mathcal{L}^{[k]}_{Y_n}).$$

2.4 Cas particuliers

On se donne une immersion fermée $\alpha_1 : X_1 \hookrightarrow Y_1$, où Y_1 est un S_1-schéma lisse, définie par un faiceau d'idéaux L_1, $\beta_1 : X_1 \hookrightarrow Z_1$ une immersion fermée de X_1 dans un S_1-schéma lisse Z_1, donnée par un faisceau d'idéaux M_1, h un morphisme de S_1-schémas : $Z_1 \to Y_1$ tel que $h \circ \beta_1 = \alpha_1$ (comme en 1 pour $n = 1$). Par changement de base, on a une immersion fermée $\alpha_0 : X_0 \hookrightarrow Y_0$, donnée par le faisceau d'idéaux $L_0 = L_1/pL_1$ (resp. $X_0 \hookrightarrow Z_0$, donnée par le faisceau d'idéaux M_0). On note aussi $\mathcal{P}(Y_1)$ la PD-enveloppe de l'idéal L_1, et $\mathcal{J}_{Y_1}$ le faisceau de PD-idéaux de cette algèbre (resp. $\mathcal{J}_{Z_1}$ le faisceau de PD-idéaux de $\mathcal{P}(Z_1)$).

On suppose de plus qu'il existe une section s_e au morphisme canonique $\mathcal{O}_{Y_1} \to \alpha_{1*}\mathcal{O}_{X_1}$. Cette section $s_e : \alpha_{1*}\mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{O}_{Y_1}$ permet de munir l'algèbre $\mathcal{P}(Y_1)$ d'une structure de $\alpha_{1*}\mathcal{O}_{X_1}$-module.

Proposition 2.4.1. *Soit* $i \in \{0,1\}$.

(i) Le complexe $\mathcal{M}^{[1]}_{Y_i}$ *(4) est à cohomologie en degrés* 0 *et* 1 *et est donné par :*

$$\mathcal{M}^{[1]}_{Y_i} \ : \ 0 \to \mathcal{J}_{Y_i}/\mathcal{J}^{[2]}_{Y_i} \to \alpha_i^*\Omega^1_{Y_i} \to 0.$$

(ii) On a un quasi-isomorphisme canonique de complexes : $h^*\mathcal{M}^{[1]}_{Y_i} \to \mathcal{M}^{[1]}_{Z_i}$.

(iii) Quand $Y_i = X_i$*, on obtient* $\mathcal{M}^{[1]}_{X_i} \simeq \Omega^1_{X_i}[-1]$.

Remarque. La différentielle du complexe $F_*\mathcal{M}^{[1]}_{Y_0}$ est $\mathcal{O}_{X'_0}$-linéaire de sorte que ce complexe est un complexe de $\mathcal{O}_{X'_0}$-modules.

Démonstration. Pour la démonstration, nous fixons $i = 1$, le cas $i = 0$ étant identique. Le (i) est une simple réécriture de 4 puisque $\mathcal{J}^{[k]} = \mathcal{O}_{Y_1}$ si $k \leq 0$ et que, comme l'immersion fermée $\alpha_1 : X_1 \hookrightarrow Y_1$ est régulière, on dispose d'après la proposition 1.5.3 de [Ber96] d'un isomorphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_{Y_1}$-algèbres

$$\mathcal{O}_{Y_1}/L_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_{Y_1}/\mathcal{J}_{Y_1}.$$

Le (ii) provient de la fonctorialité des résolutions $\mathcal{L}^{[m]}_{Y_n}$ déjà rappelées au début de 2.1, qui fournit des quasi-isomorphismes de complexes (V, corollaire 2.3.5 de [Ber74]). L'application induite entre $h^*\mathcal{M}^{[1]}_{Y_1}$ et $\mathcal{M}^{[1]}_{Z_1}$ provient des morphismes canoniques $h^*\mathcal{J}_{Y_1} \to \mathcal{J}_{Z_1}$, resp. $h^*\Omega^1_{Y_1} \to \Omega^1_{Z_1}$ et induit un quasi-isomorphisme de complexes puisque ces deux complexes sont une réalisation sur Y_1 et Z_1 de $Ru_{X_1*}(\mathcal{J}_{X_1/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X_1/S_1})$. □

Soient d_i le morphisme canonique $L_i/L_i^2 \to \alpha_i^*\Omega^1_{Y_i}$. On a alors la

Proposition 2.4.2. *Sous les hypothèses ci-dessus et pour* $i \in \{0,1\}$,

(i) le complexe $\mathcal{M}^{[1]}_{Y_i}$ *est quasi-isomorphe au complexe*

$$0 \to L_i/L_i^2 \xrightarrow{d_i} \alpha_i^*\Omega^1_{Y_i} \to 0.$$

(ii) On dispose d'un quasi-isomorphisme canonique de complexes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_i/L_i^2 & \longrightarrow & \alpha_i^*\Omega^1_{Y_i} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_i/M_i^2 & \longrightarrow & \beta_i^*\Omega^1_{Z_i} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Démonstration. La démonstration est donnée pour $i = 1$, le cas $i = 0$ étant identique. On commence par (i). Grâce au lemme précédent, il suffit de montrer que les flèches canoniques qui suivent sont des isomorphismes

$$L_1/L_1^2 \to \mathcal{J}_{Y_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{Y_1}.$$

Cette question est locale sur X_1. Comme α_1 est une immersion fermée de schémas lisses, cette immersion est régulière et on peut de nouveau utiliser la proposition 1.5.3 de [Ber96]. Soit $\mathcal{W}$ un ouvert affine de Y_1 tel que $\tau_1, \ldots, \tau_n$ soit une suite régulière de générateurs de $L(\mathcal{W})$. Alors, d'après loc. cit., et en utilisant la structure de $\alpha_{1*}\mathcal{O}_{X_1}$ donné par la section s_e,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{Y_1}/\mathcal{J}_{Y_1}^{[2]}(\mathcal{W}) &\simeq \bigoplus_{k=1}^{n} \alpha_{1*}\mathcal{O}_{X_1}(\mathcal{W})\tau_i \\ &\simeq L_1(\mathcal{W})/L_1(\mathcal{W})^2,\end{aligned}$$

ce qui donne le (i). Le (ii) est une simple reformulation du lemme précédent. □

Dans la suite, nous appliquerons le résultat précédent aux immersions diagonales $X_0 \hookrightarrow X_1 \times_{S_1} \cdots \times_{S_1} X_1$, puisque les surjections canoniques $\mathcal{O}_{X_1} \otimes_{W_2} \cdots \otimes_{W_2} \mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{O}_{X_1}$ possèdent des sections. Considérons en particulier $\alpha_1 : X_1 \hookrightarrow X_1 \times X_1$ l'immersion diagonale et la section s_e du morphisme $\mathcal{O}_{X_1} \otimes_{W_2} \mathcal{O}_{X_1} \to \alpha_{1*}\mathcal{O}_{X_1}$ donnée par $s_e(b) = 1 \otimes b$.

Proposition 2.4.3. *Soit $i \in \{0, 1\}$,*

(i) Le complexe $\mathcal{M}_{X_i}^{[1]}$ est quasi-isomorphe à $\Omega^1_{X_i}[-1]$.

(ii) le complexe $\mathcal{M}_{X_i \times X_i}^{[1]}$ est quasi-isomorphe au complexe de $\mathcal{O}_{X_i}$-modules

$$0 \to \Omega^1_{X_i} \to \alpha_i^*\Omega^1_{X_i \times X_i} \to 0,$$

dont la différentielle d_i est donnée localement, pour $b, c \in \mathcal{O}_{X_i}$, par $d_i(b \cdot dc) = b \cdot (1 \otimes dc - dc \otimes 1)$.

Démonstration. Il s'agit d'une simple application de 2.4.2. Avec les notations de cette proposition, dans le cas (i), $L_i = 0$. Dans le cas (ii), $L_i/L_i^2 = \Omega^1_{X_i}$, et la description de la différentielle résulte alors de 2.4.2. □

Remarque. Le quasi-isomorphisme de (iii) de 2.4.2 entre les deux complexes de la proposition est donné par le quotient par l'idéal diagonal $L_{X_i \times X_i}$ et le morphisme canonique $\alpha_i^*\Omega^1_{X_i \times X_i} \to \Omega^1_{X_i}$. Le diagramme suivant décrit ce quasi-isomorphisme de complexes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega^1_{X_i} \arrow[r, "d_i"] \arrow[d] & \alpha_i^*\Omega^1_{X_i \times X_i} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & \Omega^1_{X_i} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

2.5 Définition du Frobenius divisé pour $k \leq p-2$

On considère $k \leq p-2$, et on se place sous les hypothèses de 1. En particulier, on travaille avec un schéma X lisse sur S. Le Frobenius divisé de Fontaine-Messing [FM87] induit par passage à la cohomologie un Frobenius divisé noté

$$\Phi_{cris}^{(k)} \ : \ Ru_{X_0'*}\mathcal{J}^{[k]}_{X_0'/S_0}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X_0'/S_0} \to Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0}.$$

Comme précédemment, on suppose donné α_n une immersion fermée $X_n \hookrightarrow Y_n$ de X_n dans un S_n-schéma lisse. On suppose ici de plus que Y_n est muni d'un relèvement du Frobenius $F : Y_n \to Y_n'$ comme en 1. On note encore F l'application induite $F^{-1}\mathcal{O}_{Y_n'} \to \mathcal{O}_{Y_n}$ resp. F l'application induite $F^{-1}\Omega^1_{Y_n'} \to \Omega^1_{Y_n}$.

Rappelons les définitions de Fontaine-Messing et de Kato du Frobenius divisé. On reprend les notations de 2.1.

2.5.1 Frobenius divisé cristallin en degré 0**.** En degré 0, il suffit de se donner un plongement $X_0 \hookrightarrow Y_0$ dans un S_0-schéma lisse. Pour $k=0$, le complexe $\mathcal{M}^{[0]}_{Y_0'}$ est réduit en degré 0, et est quasi-isomorphe à $\mathcal{O}_{X_0'}$. Le morphisme de Frobenius : $F^{-1}\mathcal{O}_{Y_0'} \to \mathcal{O}_{Y_0}$ induit un morphisme $F^{-1}\mathcal{P}(Y_0') \to \mathcal{P}(Y_0)$, qui envoie le PD-idéal $\mathcal{J}_{Y_0'}$ sur 0, si bien que ce morphisme induit un morphisme $\Phi^{(0)}_{e,0} : F^{-1}\mathcal{O}_{X_0'} \to \mathcal{P}(Y_0)$ (puisque $\mathcal{P}(Y_0')/\mathcal{J}_{Y_0'} \simeq \mathcal{O}_{X_0'}$). En degré 0, le morphisme de Frobenius divisé

$$\Phi^{(0)}_e : \mathcal{M}^{[0]}_{Y_0'} \to \mathcal{E}_{Y_0},$$

est alors donné par $\Phi^{(0)}_{e,0}$. Cette définition ne dépend pas du choix de Y_0, par un argument standard qui consiste à considérer les produits cartésiens de deux plongements lisses Y_0 et Z_0. En particulier, pour calculer $\Phi^{(0)}_e$, on peut prendre $Y_0 = X_0$ et on voit que $\Phi^{(0)}_e$ correspond au morphisme de complexes $\mathcal{O}_{X_0'} \to DR_{X_0}$.

2.5.2 Frobenius divisé cristallin en degré supérieur à 1**.**

Lemme 2.5.3. *Si* $1 \leq k \leq p-2$*, alors on a*

$$F(\mathcal{L}^{[k]}_{Y_n'}) \subset p^k\mathcal{E}_{Y_n},$$
$$F(\mathcal{L}^{[k+1]}_{Y_n'}) \subset p^{k+1}\mathcal{E}_{Y_n}.$$

Démonstration. L'argument est dû à Fontaine-Messing. Soit q un entier positif, tel que $q \leq k+1$. Comme $p \geq k+1$, on a l'égalité $\mathcal{J}^{[k+1-q]}_{Y_n} = \mathcal{J}^{k+1-q}_{Y_n}$. Soit $x \in \mathcal{J}_{Y_n'}$, alors $F(x) = x^p + pu$ avec $u \in \mathcal{O}_{Y_n}$, et donc $F(x) = p(x^{[p]} + u) \in p\mathcal{O}_{Y_n}$. De plus, si $y \in \mathcal{O}_{Y_n'}$, et si on pose $F(y) = y^p + pv$, alors $d(F(y)) = p(y^{p-1}dy + dv) \in p\Omega^1_{Y_n}$. On en déduit l'inclusion $F(\Omega^q_{Y_n'}) \subset p^q\Omega^q_{Y_n}$. On voit ainsi que si $k \leq p-2$,

$$F\left(\mathcal{J}^{[k-q]}_{Y_n}\Omega^q_{Y_n'}\right) \subset p^k\mathcal{E}_{Y_n},$$

ce qui donne l'assertion. □

Soit $n \geq k$, on peut donc définir l'application de Frobenius divisé au niveau des résolutions comme le fait Kato (chapter I, 1) en constatant qu'il existe une unique application $\overline{\Phi}_k$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}^{[k]}_{Y'_n} \arrow[rr, "\overline{\Phi}_k"] \arrow[dr, "F"'] & & F_*\mathcal{E}_{Y_{n-k}} \\ & p^k F_*\mathcal{E}_{Y_n}. \arrow[ur, "m_p^{-k}"'] & \end{tikzcd}$$

Si $n = k$, on remarque que $\overline{\Phi}_k(p\mathcal{L}^{[k]}_{Y'_k}) = 0$, de sorte que le morphisme $\overline{\Phi}_k$ passe au quotient en un morphisme

$$\Phi_k : \mathcal{L}^{[k]}_{Y'_0} \to F_*\mathcal{E}_{Y_0}.$$

Et comme $\Phi_k(\mathcal{L}^{[k+1]}_{Y'_0}) = 0$, ce morphisme passe au quotient en un morphisme noté

$$\Phi_e^{(k)} : \mathcal{M}^{[k]}_{Y'_0} \to F_*\mathcal{E}_{Y_0}. \tag{6}$$

Ces applications sont indépendantes du choix de deux plongements lisses, Y_1 et Y_2, tels que Y_1 soit muni d'un relèvement du Frobenius relatif F_1 (resp. F_2 sur Y_2). Pour voir cela, on utilise un argument standard qui consiste à considérer le plongement de X_0 dans le produit $Y_1 \times_{S_1} Y_2$ muni du Frobenius relatif $F_1 \times F_2$.

Pour un schéma X lisse sur S quelconque, on construit l'application de Frobenius divisé $\Phi_e^{(k)}$ en utilisant un argument de descente cohomologique qui sera détaillé en 3. Ces applications $\Phi_e^{(k)}$ induisent les morphismes de Fontaine-Messing dans $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$

$$\Phi^{(k)}_{cris} : Ru_{X'_0 *}\mathcal{J}^{[k]}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X'_0/S_0} \to Ru_{X_0 *}\mathcal{O}_{X_0/S_0}. \tag{7}$$

Posons $\Phi_{cris} = \bigoplus_{k=0}^{p-2} \Phi^{(k)}_{cris}$, on dispose ainsi d'un morphisme dans $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$

$$\Phi_{cris} : \bigoplus_{k=0}^{p-2} Ru_{X'_0 *}\mathcal{J}^{[k]}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X'_0/S_0} \to Ru_{X_0 *}\mathcal{O}_{X_0/S_0}. \tag{8}$$

2.6 Compatibilité du Frobenius divisé aux produits

2.6.1 Structures multiplicatives. Soient α_n une immersion fermée de S_n-schémas lisses $X_n \hookrightarrow Y_n$, $\mathcal{P}(Y_n)$ la PD enveloppe du faisceau d'idéaux définissant l'immersion α_n, α'_n l'immersion fermée : $X_n \hookrightarrow spec\,\mathcal{P}(Y_n)$, $\mathcal{J}$ le PD-idéal du faisceau de PD-algèbres $\mathcal{P}(Y_n)$. Par construction on a une surjection canonique $s_n : {\alpha'}^*_n\mathcal{P}(Y_n) \to \mathcal{O}_{X_n}$. On dispose aussi de morphismes canoniques $c_n : \alpha_n^*\Omega^i_{Y_n} \to \Omega^i_{X_n}$ (on notera plus simplement $c = c_1$).

Notons aussi

$$\tilde{\Omega}^i_{Y_n} = \mathcal{P}(Y_n) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^i_{Y_n} \text{ et } \mathcal{J}^{[m]}\tilde{\Omega}^i_{Y_n} = \mathcal{J}^{[m]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \tilde{\Omega}^i_{Y_n}.$$

On dispose de morphismes de réduction $red : \tilde{\Omega}^i_{Y_n} \to \alpha_{n*}\Omega^i_{X_n}$ définis par $red(1 \otimes \eta) = c(\eta)$ pour η une section locale de $\Omega^i_{Y_n}$.

Nous nous référons là encore à [Kat87] (chapter I,2). Avec les notations 2.1, il existe une structure de complexe-anneau (c-anneau en abrégé) sur les complexes $\mathcal{E}_{Y_n}$, c'est-à-dire un accouplement

$$\mathcal{E}_{Y_n} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \mathcal{E}_{Y_n} \to \mathcal{E}_{Y_n},$$

vérifiant les axiomes usuels des anneaux. Il revient au même d'observer que

$$\mathbf{E}_{Y_n} = \bigoplus_{i=0}^{N} \mathcal{P}(Y_n) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^i_{Y_n}$$

est un anneau unitaire gradué avec comme unité $1 \in \mathcal{P}(Y_n)$ en degré 0 pour l'accouplement suivant : soient $a \otimes \omega_i \in \mathcal{P}(Y_n) \otimes \Omega^i_{Y_n}$ et $b \otimes \omega_{i'} \in \mathcal{P}(Y_n) \otimes \Omega^{i'}_{Y_n}$, on définit

$$(a \otimes \omega_i) \cdot (b \otimes \omega_{i'}) = ab\, \omega_i \wedge \omega_{i'}.$$

La relation classique

$$d((a \otimes \omega_i) \wedge (b \otimes \omega_{i'})) = d(a \otimes \omega_i) \wedge (b \otimes \omega_{i'}) + (-1)^i (a \otimes \omega_i) \wedge d(b \otimes \omega_{i'}),$$

entraîne que cette structure d'anneaux gradués donne une structure de c-anneau sur le complexe $\mathcal{E}_{Y_n}$. Comme

$$\mathcal{J}^{[m]}\tilde{\Omega}^i_{Y_n} \cdot \mathcal{J}^{[m']}\tilde{\Omega}^{i'}_{Y_n} \subset \mathcal{J}^{[m+m']}\tilde{\Omega}^{i+i'}_{Y_n},$$

le complexe $\mathcal{L}^{[k]}_{Y_n}$ est un sous c-complexe de $\mathcal{E}_{Y_n}$, correspondant au module gradué

$$\mathbf{L}^{[k]}_{Y_n} = \bigoplus_{i=0}^{N} \mathcal{J}^{[k-i]}\tilde{\Omega}^i_{Y_n}.$$

D'autre part, le choix de signe pour les différentielles du complexe produit tensoriel dérivé détaillé en 1 est fait pour que $Prod$ s'étende en un morphisme de complexes

$$Prod: \ \mathcal{E}_{Y_n} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \mathcal{E}_{Y_n} \to \mathcal{E}_{Y_n}, \text{resp. } Prod: \ \mathcal{L}^{[1]}_{Y_n} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \mathcal{L}^{[1]}_{Y_n} \to \mathcal{L}^{[k]}_{Y_n}.$$

Lemme 2.6.1.1. *(i) Le morphisme F induit un endomorphisme d'anneaux unitaires de $\mathbf{E}_{Y_n}$, et donc un endomorphisme du c-anneau $\mathcal{E}_{Y_n}$.*

(ii) Soit $n \geq k$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}^{[1]}_{Y'_n} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \mathcal{L}^{[1]}_{Y'_n} \arrow[r, "\otimes^k \overline{\Phi}_1"] \arrow[d, "Prod"] & F_*\mathcal{E}_{Y_{n-1}} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} F_*\mathcal{E}_{Y_{n-1}} \arrow[d, "\overline{Prod}"] \\ \mathcal{L}^{[k]}_{Y'_n} \arrow[r, "\overline{\Phi}_k"] & F_*\mathcal{E}_{Y_{n-k}}, \end{tikzcd}$$

où $\overline{Prod}$ est l'application produit, suivie de l'application canonique $F_*\mathcal{E}_{Y_{n-1}} \to F_*\mathcal{E}_{Y_{n-k}}$.

(iii) Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^{[1]}_{Y'_0} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \mathcal{M}^{[1]}_{Y'_0} \arrow[r, "\otimes^k \Phi_e^{(1)}"] \arrow[d, "Prod"] & F_*\mathcal{E}_{Y_0} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} F_*\mathcal{E}_{Y_0} \arrow[d, "Prod"] \\
\mathcal{M}^{[k]}_{Y'_0} \arrow[r, "\Phi_e^{(k)}"] & F_*\mathcal{E}_{Y_0}.
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Par la propriété universelle de l'algèbre des algèbres à puissances divisées, F induit un morphisme de PD-algèbres : $\mathcal{P}(Y'_n) \to F_*\mathcal{P}(Y_n)$. D'autre part, le morphisme F induit un morphisme gradué entre les algèbres extérieures $\bigoplus_{i=0}^N \Omega^i_{Y'_n} \to F_* \bigoplus_{i=0}^N \Omega^i_{Y_n}$, de sorte que F induit un morphisme gradué de c-anneaux $\mathcal{E}_{Y'_n} \to F_*\mathcal{E}_{Y_n}$. De façon précise, si $\tilde{\omega}_i = a \otimes \omega_i \in \tilde{\Omega}^i_{Y'_n}$, et $\tilde{\omega}_{i'} = b \otimes \omega_{i'} \in \tilde{\Omega}^{i'}_{Y'_n}$,

$$\begin{aligned}
F(\tilde{\omega}_i \cdot \tilde{\omega}_{i'}) &= F(a)F(b)F(\omega_i) \wedge F(\omega_{i'}) \\
&= F(\tilde{\omega}_i) \wedge F(\tilde{\omega}_{i'}).
\end{aligned}$$

Ceci montre (i). Soient $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \{0, \ldots, N\}$, et $|\underline{a}| = a_1 + \ldots + a_k$. Pour montrer (ii), il faut montrer que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J}^{[1-a_1]}\tilde{\Omega}^{a_1}_{Y'_n} \otimes \cdots \otimes \mathcal{J}^{[1-a_k]}\tilde{\Omega}^{a_k}_{Y'_n} \arrow[r, "\otimes^k \overline{\Phi}_1"] \arrow[d, "Prod"] & F_*\mathcal{E}_{Y_{n-1}} \otimes \cdots \otimes F_*\mathcal{E}_{Y_{n-1}} \arrow[d, "\overline{Prod}"] \\
\mathcal{J}^{[1-|\underline{a}|]}\tilde{\Omega}^{|\underline{a}|}_{Y'_n} \arrow[r, "\overline{\Phi}_k"] & F_*\mathcal{E}_{Y_{n-k}}.
\end{tikzcd}$$

On rappelle que l'on a une application $m_p : \mathcal{E}_{Y_{n-1}} \to \mathcal{E}_{Y_n}$, qui envoie x sur la classe de px. Soit $\tilde{\omega}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\omega}_k$ une section locale de $\mathcal{J}^{[1-a_1]}\tilde{\Omega}^{a_1}_{Y'_n} \otimes \cdots \otimes \mathcal{J}^{[1-a_k]}\tilde{\Omega}^{a_k}_{Y'_n}$, d'après (i) on a

$$\begin{aligned}
m_p^k \overline{Prod}(\overline{\Phi}_1^{\otimes k})(\tilde{\omega}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\omega}_k) &= F(\tilde{\omega}_1) \wedge \cdots \wedge F(\tilde{\omega}_k) \\
&= F(\tilde{\omega}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}_k) \\
&= m_p^k \overline{\Phi}_k(\tilde{\omega}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}_k),
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat (ii). Appliquons ce résultat avec $n = k$: le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^{[1]}_{Y'_k} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \mathcal{L}^{[1]}_{Y'_k} \arrow[r, "\otimes^k \overline{\Phi}_1"] \arrow[d, "Prod"] & F_*\mathcal{E}_{Y_{k-1}} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} F_*\mathcal{E}_{Y_{k-1}} \arrow[d, "\overline{Prod}"] \\
\mathcal{L}^{[k]}_{Y'_k} \arrow[r, "\overline{\Phi}_k"] & F_*\mathcal{E}_{Y_0}.
\end{tikzcd}$$

Le complexe $\mathcal{M}^{[k]}_{Y_k}$ est égal au quotient $\mathcal{L}^{[k]}_{Y_k}/\mathcal{L}^{[k+1]}_{Y_k}$ et tous les morphismes considérés sont induits par le passage au quotient. Pour montrer le (iii) du lemme, on utilise alors le fait que le diagramme suivant est commutatif, dont les flèches verticales sont les surjections canoniques entre les objets

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^{[1]}_{Y'_k} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \mathcal{L}^{[1]}_{Y'_k} \arrow[r, "\otimes^k \overline{\Phi}_1"] \arrow[d] & F_* \mathcal{E}_{Y_{k-1}} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} F_* \mathcal{E}_{Y_{k-1}} \arrow[d] \\
\mathcal{M}^{[1]}_{Y'_0} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \mathcal{M}^{[1]}_{Y'_0} \arrow[r, "\otimes^k \Phi^{(1)}_e"] & F_* \mathcal{E}_{Y_0} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} F_* \mathcal{E}_{Y_0},
\end{tikzcd}$$

ainsi que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^{[k]}_{Y'_k} \arrow[r, "\overline{\Phi}_k"] \arrow[d] & F_* \mathcal{E}_{Y_0} \arrow[d] \\
\mathcal{M}^{[k]}_{Y'_0} \arrow[r, "\Phi^{(k)}_e"] & F_* \mathcal{E}_{Y_0}.
\end{tikzcd}$$

□

Remarquons maintenant que l'application $Prod$ est fonctorielle par rapport à Y_n (2 de [Kat87]). On en déduit formellement les trois lemmes suivants.

Soient Z_n un S_n-schéma lisse et f un S_n-morphisme tel qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & Y_n \arrow[d, "f"] \\
X_n \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook] & Z_n.
\end{tikzcd}$$

Alors on a

Lemme 2.6.1.2. *(i) Les morphismes canoniques $f^*\mathcal{L}^{[k]}_{Z_n} \to \mathcal{L}^{[k]}_{Y_n}$ sont compatibles au produit Prod.*

(ii) Les morphismes canoniques $f^*\mathcal{M}^{[k]}_{Z_n} \to \mathcal{M}^{[k]}_{Y_n}$ sont compatibles au produit Prod.

Pour la même raison, on a l'énoncé suivant

Lemme 2.6.1.3. *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{Y_n} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \mathcal{E}_{Y_n} \arrow[r, "\otimes^k red"] \arrow[d, "Prod"] & (DR_{X_n})^{\otimes^{\mathbf{L}} k} \arrow[d, "Prod"] \\
\mathcal{E}_{Y_n} \arrow[r, "red"] & DR_{X_n}.
\end{tikzcd}$$

Reprenons c_k l'application canonique : $\alpha_n^*\Omega^k_{Y_n} \to \Omega^k_{X_n}$. Les complexes $\mathcal{M}^{[k]}_{Y_n}$ et $\alpha_n^*\Omega^k_{X_n}[-k]$ sont quasi-isomorphes, le quasi-isomorphisme étant donné par l'application de réduction red définie par

$$\text{si } s \neq k,\ red\left(\mathcal{J}^{[k-s]}/\mathcal{J}^{[k-s+1]}\tilde{\Omega}^s_{Y_n}\right) = 0$$
$$\text{si } \eta \in \Omega^k_{Y_n},\ red(1 \otimes \eta) = c_k(1 \otimes \eta).$$

Nous avons aussi le

Lemme 2.6.1.4. *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^{[1]}_{Y_n} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}} \mathcal{M}^{[1]}_{Y_n} \arrow[r, "\otimes^k red"] \arrow[d, "Prod"] & \left(\Omega^1_{X_n}[-1]\right)^{\otimes k} \arrow[d, "Prod"] \\
\mathcal{M}^{[k]}_{Y_n} \arrow[r, "red"] & \Omega^k_{X_n}[-k].
\end{tikzcd}$$

3 Comparaison avec le morphisme de Deligne-Illusie

3.1 Enoncé du résultat

Deligne et Illusie construisent en [DI87] un quasi-isomorphisme dans $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$:

$$DI' = \bigoplus_{k=0}^{p-1} DI^{(k)} : \bigoplus_{k=0}^{p-1} \Omega^k_{X'_0}[-k] \to \sigma_{\leq p-1} F_* DR_{X_0},$$

dont la définition précise utilisant un recouvrement affine de X_1, est donnée en 3.3.1. On notera DI la restriction de DI' aux termes de gauche de degré inférieur à $p-2$. D'autre part, nous avons rappelé en 2.5 la définition cristalline du Frobenius divisé de Fontaine-Messing. Nous pouvons considérer le diagramme suivant dans $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{k=0}^{p-2} Ru_{X'_0 *} \mathcal{J}^{[k]}_{X'_0/S_0} / \mathcal{J}^{[k+1]}_{X'_0/S_0} \arrow[r, "\Phi_{cris}"] \arrow[d, "can"'] & \sigma_{\leq p-2} F_* Ru_{X_0 *} \mathcal{O}_{X_0/S_0} \arrow[d, "can"'] \\
\bigoplus_{k=0}^{p-2} \Omega^k_{X'_0}[-k] \arrow[r, "DI"] & \sigma_{\leq p-2} F_* DR_{X_0},
\end{tikzcd} \tag{9}$$

dont les flèches canoniques sont les flèches cristallines habituelles, expliquées en 2.1.

Un des objectifs de cet article est de montrer le

Théorème 3.1.1. *Le diagramme précédent est commutatif.*

La démonstration de ce théorème occupe la section 3 et sera donnée en 3.5.

Rappelons que, par passage à la cohomologie, le morphisme $\mathcal{H}^k \circ DI'^{(k)}$, coïncide avec l'isomorphisme de Cartier $C^{-1} : \Omega^k_{X'_0} \to \mathcal{H}^k F_* DR_{X_0}$. Pour $k = 1$, ce morphisme de Cartier est défini pour c une section locale de $\mathcal{O}_{X'_0}$ par $C^{-1}(dc) =$ classe de $(c^{p-1}dc)$ dans $\mathcal{H}^1 F_* DR_{X_0}$.

3.2 Considérations simpliciales

3.2.1 Notations. Il est classique que l'action du Frobenius sur la cohomologie cristalline se calcule par descente cohomologique. Nous mettons en place ce calcul ici. Donnons-nous un recouvrement ouvert de X_1 par des ouverts affines $\mathcal{U}_i$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$, munis de coordonnées globales et d'un relèvement du Frobenius $F_i : \mathcal{U}'_i \to \mathcal{U}_i$. Soit $\mathcal{U}_{[0]} = \coprod_{i \in I} \mathcal{U}_i$.

On considère aussi U_i les fibres spéciales de ces ouverts, qui forment un recouvrement de X_0 et $U_{[0]} = \coprod_{i\in I} U_i$. Soit $\mathcal{U}_\bullet$ le S_0-schéma simplicial donné par le cosquelette $cosq(\mathcal{U}_{[0]} \to S_0)$, i.e. le schéma simplicial augmenté vers S_0 de composantes les puissances cartésiennes de $\mathcal{U}_{[0]}$ sur S_0, $U_\bullet$ le schéma simplicial augmenté vers X_0, $cosq(U_{[0]} \to X_0)$, de composantes les puissances cartésiennes de $\mathcal{U}_{[0]}$ sur X_0. Nous disposons bien entendu, après changement de base par le Frobenius, des schémas simpliciaux $U'_\bullet$ et $\mathcal{U}'_\bullet$. On note alors ε le morphisme canonique $U'_{[0]} \to X'_0$.

Sur le site cristallin associé au schéma simplicial $U'_\bullet$, on considère les faisceaux $\mathcal{O}_{U'_\bullet/S_0}$, et pour tout entier k le faisceau $J^{[k]}_{U'_\bullet}$ (resp. $J_{U'_\bullet/S_0}/J^{[2]}_{U'_\bullet/S_0}$). Le schéma $U_\bullet$ (resp. $U'_\bullet$) est un sous-schéma simplicial de $\mathcal{U}_\bullet$ (resp. $\mathcal{U}'_\bullet$). Notons encore pour un multi-indice $\underline{i} = (i_0, \ldots, i_u)$:

- $U_{\underline{i}} = U_{i_0} \bigcap \cdots \bigcap U_{i_u}$, (resp. $U'_{\underline{i}} = U'_{i_0} \bigcap \cdots \bigcap U'_{i_u}$), $\mathcal{U}_{\underline{i}} = \mathcal{U}_{i_0} \bigcap \cdots \bigcap \mathcal{U}_{i_u}$ (resp. $\mathcal{U}'_{\underline{i}} = \mathcal{U}'_{i_0} \bigcap \cdots \bigcap \mathcal{U}'_{i_u}$),
- $\mathcal{U}_{(\underline{i})} = \mathcal{U}_{i_0} \times_{S_1} \ldots \times_{S_1} \mathcal{U}_{i_u}$, $U_{(\underline{i})} = U_{i_0} \times_{S_0} \ldots \times_{S_0} U_{i_u}$ (resp. version primée),
- $\alpha_{\underline{i}}$ l'immersion fermée $\mathcal{U}_{\underline{i}} \hookrightarrow \mathcal{U}_{(\underline{i})}$, $\alpha'_{\underline{i}}$ l'immersion fermée $U'_{\underline{i}} \hookrightarrow \mathcal{U}'_{(\underline{i})}$, $\beta_{\underline{i}}$ l'immersion fermée $U_{\underline{i}} \hookrightarrow U_{(\underline{i})}$, $\beta'_{\underline{i}}$ l'immersion fermée $U'_{\underline{i}} \hookrightarrow U'_{(\underline{i})}$. Soit $M'_{\underline{i}}$ l'idéal de cette immersion. Avec ces notations $M'_{i,j}$ est l'idéal de l'immersion diagonale $U'_{i,j} \hookrightarrow U_{(i,j)}$.
- $\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(\underline{i})})$ la PD-enveloppe de l'immersion $\alpha_{\underline{i}}$, $\mathcal{J}_{\underline{i}}$ le PD-idéal de cette PD-enveloppe, (resp. $\mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})})$ la PD-enveloppe de l'immersion $\alpha'_{\underline{i}}$, et $\mathcal{J}'_{\underline{i}}$ le PD-idéal correspondant), $\mathcal{P}(U_{(\underline{i})})$ la PD-enveloppe de l'immersion fermée $\beta_{\underline{i}} : U_{\underline{i}} \hookrightarrow U_{(\underline{i})}$, $J_{\underline{i}}$ le PD-idéal de cette PD-enveloppe, (resp. $\mathcal{P}(U'_{(\underline{i})})$ la PD-enveloppe de l'immersion fermée $\beta'_{\underline{i}}$, $J'_{\underline{i}}$ le PD-idéal correspondant).
- Notons encore les immersions ouvertes $j_{\underline{i}} : U_{\underline{i}} \hookrightarrow X_0$, et $j'_{\underline{i}} : U'_{\underline{i}} \hookrightarrow X'_0$.
- Nous disposons d'immersions fermées de schémas simpliciaux $\mathcal{U}'_\bullet \hookrightarrow \mathcal{U}'_{(\bullet)}$, resp. $U_\bullet \hookrightarrow U_{(\bullet)}$, resp. $\mathcal{U}_\bullet \hookrightarrow \mathcal{U}_{(\bullet)}$, resp. $U_\bullet \hookrightarrow U_{(\bullet)}$. Nous pouvons alors introduire les complexes simpliciaux $\mathcal{E}$, $\mathcal{L}^{[k]}$ et $\mathcal{M}^{[k]}$ correspondant à ces immersions fermées, et qui seront notés respectivement $\mathcal{L}^{[k]}_{\mathcal{U}'_{(\bullet)}}$, $\mathcal{L}^{[k]}_{U'_{(\bullet)}}$, $\mathcal{M}^{[k]}_{\mathcal{U}'_{(\bullet)}}$, $\mathcal{M}^{[k]}_{U'_{(\bullet)}}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{U}_{(\bullet)}}$, $\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}$.
- Notons $\mathcal{V}_{(\bullet)}$ l'un des schémas simpliciaux précédents et $\mathcal{K}_{\mathcal{V}_{(\bullet)}}$ un complexe simplicial sur $\mathcal{V}_{(\bullet)}$, on notera le complexe situé à l'étage u du schéma simplicial $\mathcal{V}_{(\bullet)}$ par

  $$\mathcal{K}_{\mathcal{V}_{(\bullet)}}(u) = \mathcal{K}_{\mathcal{V}_{(\bullet)}}(\coprod_{|\underline{i}|=u} \mathcal{V}_{\underline{i}}), \text{ et } \mathcal{K}_{\mathcal{V}_{(\bullet)},s}(u)$$

  désignera le s-ième terme de ce complexe.

Dans la suite on adaptera la proposition 2.4.1 aux immersions fermées $\beta_{\underline{i}}$. Soit k un entier ($k \in \mathbf{N}$). Comme $U'_\bullet$ a pour composantes des réunions disjointes d'ouverts de X'_0, les composantes du faisceau $\varepsilon^*\mathcal{J}^{[k]}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X'_0/S_0}$ sont sommes directes de restrictions de

$\mathcal{J}^{[k]}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X'_0/S_0}$ à des intersections de u-ouverts parmi les U'_i, pour u variable. On voit ainsi que $\varepsilon^*\mathcal{J}^{[k]}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X'_0/S_0}$ est le faisceau simplicial $\mathcal{J}^{[k]}_{U'_\bullet/S_0}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{U'_\bullet/S_0}$.

Par V 3.4.8 de [Ber74], la flèche canonique d'adjonction $\mathcal{J}^{[k]}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X'_0/S_0} \to R\varepsilon_*\varepsilon^*\mathcal{J}^{[k]}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X'_0/S_0}$ est un isomorphisme, ce qui nous donne finalement un isomorphisme canonique dans $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$,

$$Ru_{X'_0*}\mathcal{J}^{[k]}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X'_0/S_0} \xrightarrow{\sim} R\varepsilon_* \circ Ru_{U'_\bullet*}\mathcal{J}^{[k]}_{U'_\bullet/S_0}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{U'_\bullet/S_0}.$$

L'application $\varepsilon : U'_\bullet \to X'_0$ est affine, et grâce à la proposition 2.4.1, les termes du complexe $Ru_{U'_\bullet*}\mathcal{J}_{U'_\bullet/S_0}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{U'_\bullet/S_0}$ sont $\mathcal{O}_{U'_\bullet}$ cohérents, de sorte que ce complexe est à termes acycliques pour ε_*. Nous le calculons explicitement dans la sous-section suivante.

Dans la suite, on notera DC' les morphismes de descente cohomologique se rapportant à des résolutions simpliciales de X'_0.

3.2.2 Conventions pour les complexes simples. En vue du théorème de comparaison, nous devons faire le remarque suivante. Soit $U_\bullet$ le schéma simplicial correspondant au recouvrement (U_i). Le complexe de Cech utilisé par Deligne-Illusie est un quotient du complexe de chaînes du complexe simplicial $DR_{U_\bullet}$. De ce fait, nous modifions légèrement le passage au complexe simple de la façon suivante, pour se ramener à un analogue du complexe de Cech.

In fine, nous aurons à considérer des complexes simpliciaux $\mathcal{K}_{U_{(\bullet)}}$ sur le schéma simplicial $U_\bullet$. Pour un tel complexe, nous pouvons considérer le complexe sur X_0

$$\bigoplus_{|\underline{i}|=u} j_{\underline{i}*}\mathcal{K}_{U_{\underline{i}}}.$$

Nous remarquons alors que ceci définit un complexe simplicial sur le schéma simplicial constant $X_{0_\bullet}$ noté $j_*\mathcal{K}_{U_{(\bullet)}}$. Le complexe simple associé est le complexe de cochaînes du complexe simplicial $\mathcal{K}_{U_{(\bullet)}}$. Le complexe des cochaînes alternées est naturellement un sous-complexe du complexe de cochaînes. On pose alors

Définition 3.2.3. *Le complexe simple associé à $\mathcal{K}_{U_{(\bullet)}}$ et noté*

$$\left[j_*\mathcal{K}_{U_{(\bullet)}}\right]$$

sera le complexe quotient du complexe de cochaînes associé à $\mathcal{K}_{U_{(\bullet)}}$ par le complexe des cochaînes alternées.

Il résulte de 3.8 du chapitre 1 de [God73] que le complexe simple ainsi défini et le complexe de cochaînes (resp. $\mathcal{P}(U'_{(\underline{i})})$ la PD-enveloppe de l'immersion fermée $\beta'_{\underline{i}}$, $J'_{\underline{i}}$ le PD-idéal correspondant, sont homotopes. Cette définition est bien entendu fonctorielle. Dans le cas d'un faisceau sur X_0, qui définit un faisceau simplicial sur $U_\bullet$, le complexe ainsi défini est le complexe de Cech usuel. Si on ne prend pas cette définition, on trouve le complexe de Cech non ordonné (et infini) du faisceau considéré.

Dans la suite, nous utiliserons des propriétés de descente cohomologique, avec des morphismes satisfaisant la descente cohomologique. Il sera sous-entendu dans la suite que ces morphismes seront à valeurs dans un complexe simple au sens de la définition ci-dessus, c'est-à-dire qu'il sera obtenu en faisant suivre le morphisme de descente cohomologique habituel par passage au quotient du complexe de cochaînes. Pour les morphismes de descente cohomologique, cette flèche sera un quasi-isomorphisme, puisque l'application de passage au quotient est un isomorphisme.

Rappelons maintenant la construction de Deligne-Illusie.

3.3 Rappel de la construction du morphisme de Deligne-Illusie

3.3.1 Principe de la construction. Celle-ci est expliquée en [DI87]. Reprenons les notations de 3.2.1.

On désigne par DR_{X_0} le complexe de de Rham sur X_0 et $\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0})$ le complexe simple associé au complexe de Cech du complexe DR_{X_0}. Ces deux complexes sont quasi-isomorphes.

Tout d'abord $DI^{(0)}$ est induit par le Frobenius en degré 0 : $\mathcal{O}_{X'_0} \to F_*DR_{X_0}$.

Deligne et Illusie définissent (voir ci-dessous 3.3.3)

$$DI_e^{(1)} : \Omega^1_{X'_0}[-1] \to F_*\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0}),$$

qui donne un morphisme dans $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$:

$$DI^{(1)} : \Omega^1_{X'_0}[-1] \to F_*DR_{X_0}.$$

Pour $k \leq p-1$, il existe une section

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{S}: & \Omega^k_{X'_0}[-k] & \longrightarrow & \left(\Omega^1_{X'_0}[-1]^{\otimes k}\right) \\ & \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k & \longmapsto & \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(k)}, \end{array}$$

où $\mathfrak{S}_k$ désigne le groupe des permutations sur k éléments.

Deligne et Illusie définissent $DI^{(k)} : \Omega^k_{X'_0}[-k] \to F_*DR_{X_0}$, comme le composé

$$\Omega^k_{X'_0}[-k] \xrightarrow{\mathcal{S}} \left(\Omega^1_{X'_0}[-1]^{\otimes k}\right) \xrightarrow{DI^{(1)\otimes k}} (F_*DR_{X_0})^{\otimes^{\mathbf{L}} k} \xrightarrow{Prod} F_*DR_{X_0} ,$$

où le morphisme $Prod$ est défini comme en 2.6.1.

3.3.2 Comparaison en degré 0. En degré 0, d'après 2.5.1, on peut utiliser X_0 pour calculer $\Phi_e^{(0)} : \mathcal{O}_{X'_0} \to DR_{X_0}$. On voit alors que $\Phi_e^{(0)} = DI_e^{(0)}$ (3.3.1), ce qui signifie qu'en degré 0, le diagramme 9 est commutatif.

3.3.3 Construction en degré 1. Identifions comme d'habitude $p\mathcal{O}_{X_1}$ à $\mathcal{O}_{X_0}$ via m_p : $\mathcal{O}_{X_0} \overset{\cdot p}{\simeq} p\mathcal{O}_{X_1}$.

Suivant 2.11 et 5.4 de [Ill96], il existe un morphisme $\mathcal{O}_{X'_0}$-linéaire

$$h_{i,j} \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'_0}}(\Omega^1_{X'_0/S_0}, F_*\mathcal{O}_{X_0})(U_{i,j}),$$

tel que

(i) $\forall b, c \in \mathcal{O}_{X'_0}$, $\tilde{c}$ un relèvement de c dans $\mathcal{O}_{X'_1}$, $h_{i,j}(bdc) = b^p m_p^{-1}(F_j(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}))$, qui est indépendant du choix de $\tilde{c}$ et,

(ii) $h_{i,j} + h_{j,k} = h_{i,k}$.

La deuxième relation implique que les $h_{i,j}$ définissent un cocycle de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'_0}}(\Omega^1_{X'_0/S_0}, F_*\mathcal{O}_{X_0})$. On a :

$$\begin{aligned} F_*\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0}) :\ & 0 \to \prod_i F_*\mathcal{O}_{U_i} \to \prod_{i<j} F_*\mathcal{O}_{U_{i,j}} \bigoplus \prod_i F_*\Omega_{U_i} \\ & \to \prod_{i<j<k} F_*\mathcal{O}_{U_{i,j,k}} \bigoplus \prod_{i<j} F_*\Omega^1_{U_{i,j}} \bigoplus \prod_i F_*\Omega^2_{U_i} \to \cdots \to F_*\Omega^N_{U_{i_0,\dots,i_n}} \to 0. \end{aligned}$$

Deligne et Illusie définissent un morphisme relativement au recouvrement par les ouverts $(\mathcal{U}_i)_i$ en degrés ≤ 1 par :

(i) $\forall a \in \mathcal{O}_{X'_0}$, $DI_e^{(0)}(a) = (F(a)_{|U_i}) \in \prod_i F_*\mathcal{O}_{U_i}$,

(ii) $\forall \omega \in \Omega^1_{X'_0}$, $DI_e^{(1)}(\omega) = (h_{i,j}(\omega)_{|U_{i,j}}) \bigoplus (m_p^{-1}(dF_i(\omega))_{|U_i}) \in \prod_{i<j} F_*\mathcal{O}_{U_{i,j}} \bigoplus \prod_i F_*\Omega_{U_i}$.

3.4 Le calcul pour k=1

Les notations sont celles définies en 3.2.1. Dans ce cas, le calcul est explicite.

3.4.1 Description des étapes du calcul pour $k = 1$. Toutes les constructions et énoncés expliqués ici font l'objet des sous-sections suivantes.

(i) On considère d'abord la première colonne du diagramme 9 pour $k = 1$. On peut utiliser le schéma simplicial $U'_\bullet \hookrightarrow U'_{(\bullet)}$ pour calculer une réalisation de $Ru_{X'_0*}\mathcal{J}^{[1]}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_0}$ par descente cohomologique. On obtient ainsi un complexe $K^\bullet$ explicité en 14 et un quasi-isomorphisme de descente cohomologique $DC'_2 : Ru_{X'_0*}\mathcal{J}^{[1]}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_0} \to K^\bullet$. On définit alors en 3.4.4 un morphisme de complexes $w : \Omega^1_{X'_0}[-1] \to K^\bullet$ qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} K^\bullet & Ru_{X'_0*}\mathcal{J}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_0} \arrow[l, "DC'_2"'] \arrow[d, "can"] \\ & \Omega^1_{X'_0}[-1]. \arrow[ul, "w"] \end{tikzcd}$$

(ii) On procède de même pour la deuxième colonne du diagramme 9 pour $k = 1$. Le schéma $U_\bullet \hookrightarrow U_{(\bullet)}$ permet de calculer une réalisation $E^\bullet$ de $F_*Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0}$ (cf 2.1). Soit $F_*\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0})$ le complexe de Cech relatif au recouvrement par les ouverts U_i de X_0, du complexe de de Rham DR_{X_0}. On dispose d'un quasi-isomorphisme de réduction canonique $red : E^\bullet \to F_*DR_{X_0}$, ainsi que d'un quasi-isomorphisme res (résolution) : $F_*DR_{X_0} \to F_*\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0})$ et on montre que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} F_*Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0} \arrow[r, "DC_2"] \arrow[d, "can"] & E^\bullet \arrow[d, "red"] \\ F_*DR_{X_0} \arrow[r, "res"] & F_*\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0}). \end{tikzcd}$$

(iii) Pour $k = 1$, le morphisme de Deligne-Illusie est défini (3.3.3) par un morphisme de complexes $DI_e^{(1)} : \Omega^1_{X_0'}[-1] \to F_*\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0})$. D'autre part, comme les ouverts U_i se relève mod p^2 en les ouverts $\mathcal{U}_i$, on peut utiliser le schéma simplicial $U_\bullet \hookrightarrow U_{(\bullet)}$ pour calculer le Frobenius divisé cristallin. Concrètement, en procédant comme en 6, nous obtenons un morphisme de complexes $\Phi_e^{(1)} : K^\bullet \to E^\bullet$. La dernière étape de la vérification consiste alors à montrer (3.4.9) que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} K^\bullet \arrow[r, "\Phi_e^{(1)}"] & E^\bullet \arrow[d, "red"] \\ \Omega^1_{X_0'}[-1] \arrow[u, "w"] \arrow[r, "DI_e^{(1)}"] & F_*\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0}). \end{tikzcd}$$

La comparaison pour $k = 1$ est alors formelle à partir des trois étapes précédentes et fait l'objet de 3.4.10.

3.4.2 Conventions d'écriture. Les algèbres $\mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})})$ sont des $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}}$-algèbres, obtenues par la propriété universelle des algèbres à puissances divisées. Les morphismes $\mathcal{J}_{\underline{i}}/\mathcal{J}_{\underline{i}}^{[2]} \to \mathcal{J}_{\underline{i}'}/\mathcal{J}_{\underline{i}'}^{[2]}$ avec $|\underline{i}| = u$ et $|\underline{i}'| = u'$ sont obtenus par fonctorialité des enveloppes à puissances divisées à partir des morphismes habituels $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i}')}}$, et dont la construction est rappelée ci-dessous. Pour expliciter ces morphismes, nous nous contentons dans la suite de donner les formules pour les flèches $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i}')}}$. Il est alors sous-entendu que ces flèches donnent des flèches au niveau des complexes simpliciaux considérés, par fonctorialité des constructions. Il s'agit donc d'un abus de notation, qui est habituel. Nous considérons les applications analogues sur les ouverts $U'_{\underline{i}}$, qui seront notées de la même façon.

Nous donnerons au cours du calcul l'expression détaillée de ces flèches.

D'autre part, nous travaillons dans des quotients. Nous utiliserons alors la notation $\overline{a}$ pour signaler qu'on regarde l'image de l'élément a dans un quotient, qui sera en principe clair. Ainsi, dans $\mathcal{J}'_{\underline{i}}/\mathcal{J}'^{[2]}_{\underline{i}}$ (où $\mathcal{J}'_{\underline{i}}$ est le PD-idéal de $\mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})})$), si b est une section locale de $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_i}$, resp. c une section locale de $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_j}$, l'élément $\overline{1 \otimes bc - b \otimes c}$ sera l'image de l'élément

$1 \otimes bc - b \otimes c$ modulo $\mathcal{J}'^{[2]}_{\underline{i}}$. Les conventions sont les mêmes pour les applications analogues sur les ouverts $U'_{\underline{i}}$.

Considérons, pour $u \in \mathbf{N}$, $\underline{i} = \{i_0, \ldots, i_u\}$, et $l \in \{0, \ldots, n\} \backslash \{i_0, \ldots, i_u\}$,

$$\begin{array}{rccc} \delta_l : & \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{i_0}} \otimes_{S_1} \cdots \otimes_{S_1} \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{i_u}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{i_0}} \otimes_{S_1} \cdots \otimes_{S_1} \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_l} \otimes_{S_1} \cdots \otimes_{S_1} \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_i} \\ & f_0 \otimes \cdots \otimes f_u & \longmapsto & f_0 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \cdots \otimes f_u. \end{array}$$

Ces flèches induisent des flèches

$$\begin{array}{rccc} d'^{0,u} : & \prod_{|\underline{i}|=u+1} \mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})}) & \longrightarrow & \prod_{|\underline{i}|=u+2} \mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})}) \\ & S = \prod(S_{\underline{i}}) & \longmapsto & d'^{0,u}(S) \text{ avec } (d'^{0,u}(S))_{\underline{i}} = \sum_{l=0}^{u+1} (-1)^l \delta_l (S_{i_0, \ldots, \widehat{i_l}, \ldots, i_{u+1}}), \end{array}$$

ainsi que les flèches analogues pour $v \in \mathbf{N}$, $d'^{v,u}$:

$$\prod_{|\underline{i}|=u+1} \mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})}) \otimes \Omega^v_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}} \to \prod_{|\underline{i}|=u+2} \mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})}) \otimes \Omega^v_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}}. \tag{10}$$

De plus, on a les inclusions $\delta_l(\mathcal{J}'_{i_0,\ldots,i_u}) \subset \mathcal{J}'_{i_0,\ldots,l,\ldots,i_u}$, de sorte que δ_l induit une application

$$\delta_l : \mathcal{J}'_i / \mathcal{J}'^{[2]}_i \to \mathcal{J}'_{i,l} / \mathcal{J}'^{[2]}_{i,l}. \tag{11}$$

Ces énoncés restent vrais pour les ouverts U'_i et les idéaux $J'_{\underline{i}}$.

Le complexe $R\varepsilon_* \circ Ru_{U'_\bullet *} \mathcal{J}_{U'_\bullet/S_0} / \mathcal{J}^{[2]}_{U'_\bullet/S_0}$, avec les notations de 2.4.1 appliquées aux immersions fermées $\beta'_{\underline{i}}$, est quasi-isomorphe au bicomplexe $M^{\bullet,\bullet}$, qu'on représente comme un complexe dont les termes sont des complexes en degré 0, 1, ..., n :

$$M^{\bullet,\bullet} : 0 \to \prod_i \mathcal{M}^{[1]}_{U'_i} \to \prod_{i,j} \mathcal{M}^{[1]}_{U'_{(i,j)}} \to \cdots \to \mathcal{M}^{[1]}_{U'_{(0,\ldots,n)}} \to 0. \tag{12}$$

Toujours d'après 2.4.1, chaque complexe $\mathcal{M}^{[1]}_{U'_{(\underline{i})}}$ admet une résolution en deux crans. Soient $i, j > 0$, on a $\mathcal{M}^{[1]}_{U'_{i,j}} \simeq \Omega^1_{U'_{i,j}}[-1]$ et $\mathcal{M}^{[1]}_{U'_{(i,j)}}$ est le complexe

$$\mathcal{M}^{[1]}_{U'_{(i,j)}} : 0 \to J'_{i,j} / J'^{[2]}_{i,j} \to \beta'^*_{i,j} \Omega^1_{U'_{(i,j)}} \to 0. \tag{13}$$

L'immersion fermée $\beta'_{i,j} : U'_{i,j} \hookrightarrow U'_{(i,j)}$ induit un morphisme de complexes $\beta'^*_{i,j} \mathcal{M}^{[1]}_{U'_{(i,j)}} \to \mathcal{M}^{[1]}_{U'_{(\underline{i})}}$, nul en degré 0 et qui est donné en degré 1 par le morphisme canonique $\beta'^*_{i,j} \Omega^1_{U'_{(i,j)}} \to \Omega^1_{U'_{i,j}}$.

Considérons le bi-complexe de terme général $K^{t,u}$ pour $u, t \geq 0$,

$$K^{0,u} = \prod_{|\underline{i}|=u+1} J'_{\underline{i}} / J'^{[2]}_{\underline{i}}, \text{ et } K^{1,u} = \prod_{|\underline{i}|=u+1} \beta'^*_{\underline{i}} \Omega^1_{U'_{(\underline{i})}},$$

avec pour différentielle $d'^{\cdot,u} : K^{\cdot,u} \to K^{\cdot,u+1}$ décrites ci-dessus (10) et $d''^{t,\cdot}$, qui est la différentielle provenant du complexe donné en 2.4.1 et qui sera explicitée plus loin. Ecrivons les premiers termes de ce bicomplexe :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \\
0 \arrow[r] & \prod_i \Omega^1_{U'_i} \arrow[r, "d'^{1,1}"] \arrow[u] & \prod_{i<j} {\beta'}^*_{i,j}\Omega^1_{U'_{(i,j)}} \arrow[r] \arrow[u] & \prod_{i<j<k} {\beta'}^*_{i,j,k}\Omega^1_{U'_{(i,j,k)}} \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "d'^{0,1}"] \arrow[u, "d''^{1,0}"] & \prod_{i<j} {J'}_{i,j}/{J'}^{[2]}_{i,j} \arrow[r] \arrow[u] & \prod_{i<j<k} {J'}_{i,j,k}/{J'}^{[2]}_{i,j,k} \arrow[r] \arrow[u] & \dots .
\end{tikzcd}$$

Le complexe simple $K^\bullet$ associé à ce bi-complexe est quasi-isomorphe à $R\varepsilon_* \circ Ru_{U'_\bullet *}\mathcal{J}_{U'_\bullet/S_0}/\mathcal{J}^{[2]}_{U'_\bullet/S_0}$ et aussi au complexe $Ru_{X_0*}(\mathcal{J}_{X_0/S_0}/\mathcal{J}^{[2]}_{X_0/S_0})$, c'est-à-dire finalement au complexe à $\Omega^1_{X'_0}[-1]$ (cf 2.4.2). En particulier, la cohomologie de ce complexe est concentrée en degrés 0 et 1, de sorte que ce complexe simple est quasi-isomorphe à son tronqué cohomologique $\sigma_{\leq 1}K^\bullet$. Le complexe simple $K^\bullet$ est le complexe :

$$\begin{aligned}
K^\bullet \ : \ 0 \to 0 \overset{d_0}{\to} & \prod_{i<j} {J'}_{i,j}/{J'}^{[2]}_{i,j} \bigoplus_i \Omega^1_{U'_i} \\
& \overset{d_1}{\to} \prod_{i<j<k} {J'}_{i,j,k}/{J'}^{[2]}_{i,j,k} \bigoplus_{i<j} {\beta'}^*_{i,j}\Omega^1_{U'_{(i,j)}} \to \dots \to {\beta'}^*_{0,\dots,n}\Omega^1_{U'_{(i_0,\dots,i_n)}} \to 0, \quad (14)
\end{aligned}$$

et les premières différentielles proviennent par fonctorialité de la formation des PD-algèbres, des flèches suivantes :

$$d_1\left(\prod_{i<j}\overline{h_{i,j}} \bigoplus \prod_{i=1}^{n}\omega_i\right) = \prod_{i<j<k}\overline{(\delta_0(h_{j,k}) - \delta_1(h_{i,k}) + \delta_2(h_{i,j}))} \bigoplus \prod_{i<j}(1\otimes\omega_j - \omega_i\otimes 1 - d\overline{h_{i,j}}).$$

On note finalement DC'_2 le morphisme de descente cohomologique

$$DC'_2 \ : \ Ru_{X'_0*}\mathcal{J}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_0} \to K^\bullet.$$

Dans la sous-section suivante, nous précisons ce calcul.

3.4.3 Première étape pour $k = 1$.

Soit $\mathcal{C}^\vee(\Omega^1_{X'_0})$ le complexe de Cech du faisceau $\Omega^1_{X'_0}$ associé au recouvrement des (U'_i), alors on dispose d'un morphisme canonique de résolution $res' : \Omega^1_{X'_0} \to \mathcal{C}^\vee(\Omega^1_{X'_0})$ donné en degré 0 par $res'(\omega) = ((\omega_{|U_i}))$.

Il est tautologique que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
Ru_{X'_0*}\mathcal{J}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_0} \arrow[rr, "can=DC'_0"] \arrow[dr, "DC'_1"'] & \circlearrowleft & \Omega_{X'_0}[-1] \arrow[dl, "res'"] \\
 & \mathcal{C}^\vee(\Omega^1_{X'_0})[-1]. &
\end{tikzcd}$$

Le deuxième terme K^1 du complexe $K^\bullet$ de 14 s'identifie à

$$K^1 \simeq \prod_{i<j}\Omega^1_{U'_{i,j}} \bigoplus \prod_i \Omega^1_{U'_i}. \quad (15)$$

Définition 3.4.4. *Pour ω une section locale de $\Omega^1_{X'_0}$, on pose*

$$w_1(\omega) = ((\omega_{|U'_{i,j}}) \bigoplus \omega_{|U'_i}) \in K^1.$$

Proposition 3.4.5. *L'application w définit un morphisme de complexes $\Omega^1_{X'_0}[-1] \to K^\bullet$ rendant commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} Ru_{X'_0*}\mathcal{J}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_0} \arrow[rr, "can=DC'_0"] \arrow[dr, "DC'_2"'] & \circlearrowleft & \mathcal{O}_{X'_0} \bigoplus \Omega^1_{X'_0}[-1] \arrow[dl, "w"] \\ & K^\bullet. & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Montrons d'abord que w est un morphisme de complexes. Rappelons d'abord qu'on considère $\mathcal{O}_{X'_0\times X'_0}$ comme un $\mathcal{O}_{X'_0}$-module via $b \mapsto 1 \otimes b$.

Comme $\Omega^1_{X'_0}[-1]$ est un complexe à différentielle nulle, il suffit de montrer que $d_1 \circ w_1 = 0$. Un élément ω de $\Omega^1_{X'_0}$ s'écrit localement $\omega = bdc$, soit comme la classe de $\overline{1 \otimes bc - c \otimes b}$, avec $b, c \in \mathcal{O}_{X'_0}$. Alors $w_1(\omega) = (0 \oplus \overline{1 \otimes bc - c \otimes b}_{|U'_i \times U'_j}) \bigoplus (bdc_{|U'_i})$. La composante sur $J_{i,j,k}/J^{[2]}_{i,j,k}$ de $d_1 \circ w_1(\omega)$ est

$$\begin{aligned} d_1 \circ w_1(\omega)_{i,j,k} &= \overline{1 \otimes 1 \otimes bc - 1 \otimes c \otimes b - (1 \otimes 1 \otimes bc - c \otimes 1 \otimes b) + 1 \otimes bc \otimes 1 - c \otimes b \otimes 1} \\ &= \overline{(c \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes c \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes b - 1 \otimes b \otimes 1)} \in J^{[2]}_{i,j,k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La composante sur $\beta^*_{i,j}\Omega^1_{U'_{(i,j)}}$ de $d_1 \circ w_1(\omega)$ est

$$\begin{aligned} d_1 \circ w_1(\omega) &= -\overline{d((1 \otimes b)(1 \otimes c - c \otimes 1))} + b(1 \otimes dc - dc \otimes 1)_{|U'_{i,j}} \\ &= -\overline{(1 \otimes c - c \otimes 1)(1 \otimes db)} - (b(1 \otimes dc - dc \otimes 1) + b(1 \otimes dc - dc \otimes 1)_{|U'_{i,j}}) \\ &= \overline{(1 \otimes c - c \otimes 1)(1 \otimes db)} \\ &= 0 \in \beta^*_{i,j}\Omega^1_{U'_{(i,j)}}, \end{aligned}$$

car $(1 \otimes c - c \otimes 1)(1 \otimes db) \in M_{i,j} \otimes \Omega^1_{U'_{(i,j)}}$, où on rappelle que $M_{i,j}$ est l'idéal diagonal de l'immersion $U'_{i,j} \hookrightarrow U'_{(i,j)}$. On en conclut que w est un morphisme de complexes.

Considérons ensuite le diagramme de morphismes de schémas simpliciaux, où les deux carrés sont commutatifs

$$\begin{tikzcd} U'_\bullet \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U'_{(\bullet)} \\ U'_\bullet \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U'_\bullet \arrow[u, hook] \arrow[d] \\ X'_{0\bullet} \arrow[r, hook] & X'_{1\bullet}. \end{tikzcd}$$

Le carré cartésien du haut donne une flèche canonique $red' : K^\bullet \to \mathcal{C}^\vee(\Omega^1_{X'_0})[-1]$ tel que $red' \circ DC'_2 = DC'_1$. Le complexe $\mathcal{C}^\vee = \mathcal{C}^\vee(\Omega^1_{X'_0})[-1]$ s'écrit :

$$0 \to 0 \xrightarrow{d'_0} \prod_i \Omega^1_{U'_i} \xrightarrow{d'_1} \bigoplus \prod_{i<j} \Omega^1_{U'_{i,j}} \to \ldots \xrightarrow{d'_n} \Omega^1_{U'_{0,\ldots,n}} \to 0.$$

Calculons red'_1. On rappelle (15) l'égalité

$$K^1 = \prod_{i<j} J'_{i,j}/J'^{[2]}_{i,j} \bigoplus \prod_i \Omega^1_{U'_i}.$$

Alors, d'après la démonstration de 2.4.3 et 3.4.2, la flèche red'_1 est la projection :

$$red'_1((\omega_{i,j}) \oplus (\eta_i)) = (\eta_i).$$

Ceci nous permet de calculer pour $\omega \in \Omega^1_{X'_0}$,

$$\begin{aligned} red'_1 \circ w_1(\omega) &= red'_1((\omega_{|U'_{i,j}}) \bigoplus (\omega_{|U'_i}) \\ &= (\omega_{|U'_i}) \\ &= res'_1(\omega). \end{aligned}$$

On en conclut que $res' = red' \circ w$.

On dispose finalement du diagramme suivant dans $D^b(Ab_{X'_0})$

$$\begin{tikzcd} Ru_{X'_0 *}\mathcal{J}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_0} \arrow[rr, "can=DC'_0"] \arrow[dr, "DC'_2"'] \arrow[drrr, bend left, "DC'_1"] & & \Omega^1_{X'_0}[-1] \arrow[dl, "w"] \arrow[dr, "res'"] & \\ & K^\bullet \arrow[rr, "red'"] & & \mathcal{C}^\vee(\Omega^1_{X'_0})[-1], \end{tikzcd}$$

où

$$\begin{aligned} red' \circ DC'_2 &= DC'_1 \\ res' \circ DC'_0 &= DC'_1 \\ red' \circ w &= res'. \end{aligned}$$

On en déduit : $red' \circ DC'_2 = res' \circ DC'_0 = red' \circ w \circ DC'_0$. Comme l'application red' est un quasi-isomorphisme, cela nous donne l'égalité des morphismes dans la catégorie dérivée : $w \circ DC'_0 = DC'_2$.

□

Nous obtenons en particulier le

Corollaire 3.4.6. *Le morphisme de complexes w construit en 3.4.4 est un quasi-isomorphisme de complexes.*

3.4.7 Fin du cas $k = 1$. Relativement aux immersions $U_{\underline{i}} \hookrightarrow U_{(\underline{i})}$, nous pouvons considérer les complexes

$$\mathcal{E}_{U_{(\underline{i})}} \ : \ 0 \to \mathcal{P}(U_{(\underline{i})}) \to \mathcal{P}(U_{(\underline{i})}) \otimes_{\mathcal{O}_{U_{(\underline{i})}}} \Omega^1_{U_{(\underline{i})}} \to \cdots \to \mathcal{P}(U_{(\underline{i})}) \otimes_{\mathcal{O}_{U_{(\underline{i})}}} \Omega^N_{U_{(\underline{i})}} \to 0.$$

D'après 2.5, le morphisme $\Phi_e^{(1)}$ induit un morphisme de complexes entre le bicomplexe suivant $M^{\bullet,\bullet}$ défini en 12

$$0 \to \prod_i \mathcal{M}^{[1]}_{U_i} \to \prod_{i,j} \mathcal{M}^{[1]}_{U_{(i,j)}} \to \cdots \to \mathcal{M}^{[1]}_{U_{(0,\ldots,n)}} \to 0,$$

et le complexe

$$0 \to \prod_i F_* \mathcal{E}_{U_i} \to \prod_{i,j} F_* \mathcal{E}_{U_{(i,j)}} \to \cdots \to F_* \mathcal{E}_{U_{(0,\ldots,n)}},$$

et donc par définition de $K^\bullet$, qui est le complexe simple associé au complexe source, un morphisme $\Phi_e^{(1)}$:

$$K^\bullet \to \left[0 \to \prod_i F_* \mathcal{E}_{U_{(i)}} \to \prod_{i,j} F_* \mathcal{E}_{U_{(i,j)}} \to \cdots \to F_* \mathcal{E}_{U_{(i_0,\ldots,i_n)}} \right].$$

Dans la suite, nous noterons $E^\bullet$ le complexe simple but du morphisme précédent. Nous pouvons expliciter ce complexe de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E^\bullet \ : \ 0 \to \prod_i F_* \mathcal{O}_{U_i} \to \prod_{i<j} F_* \mathcal{P}(U_{(i,j)}) \bigoplus \prod_i F_* \Omega^1_{U_i} \\ \to \prod_{i<j<k} F_* \mathcal{P}(U_{(i,j,k)}) \bigoplus \prod_{i<j} F_* \mathcal{P}(U_{(i,j)}) \otimes \Omega^1_{U_{(i,j)}} \bigoplus \prod_i F_* \mathcal{O}_{U_i} \otimes \Omega^2_{U_i} \to \cdots \\ \to F_* \mathcal{P}(U_{(0,\ldots,n)}) \otimes \Omega^{N(n+1)}_{U_{0,\ldots,n}} \to 0. \end{aligned}$$

Considérons maintenant comme pour la démonstration de 3.4.5, le diagramme de schémas simpliciaux

$$\begin{tikzcd} U_\bullet \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U_{(\bullet)} \\ U_\bullet \arrow[r, equal] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U_\bullet \arrow[u, hook] \arrow[d] \\ X_{0\bullet} \arrow[r, hook] & X_{0\bullet}. \end{tikzcd}$$

Par descente cohomologique, on a un quasi-isomorphisme entre $E^\bullet$ et $F_* Ru_{X_0 *} \mathcal{O}_{X_0/S_0}$. On dispose enfin d'une flèche canonique *red* :

$$E^\bullet \overset{red}{\to} F_* \mathcal{C}^\vee_s(DR_{X_0}),$$

qui provient des quasi-isomorphismes $F_* \mathcal{E}_{U_{(\underline{i})}} \to F_* DR_{U_{(\underline{i})}}$, et tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} F_* Ru_{X_0 *} \mathcal{O}_{X_0/S_0} \arrow[r, "DC_1"] \arrow[dr, "DC_2"'] & F_* \mathcal{C}^\vee_s(DR_{X_0}) \, . \\ \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & E^\bullet. \arrow[u, "red"'] \end{tikzcd}$$

De même, si l'on note res la flèche de résolution canonique $F_*DR_{X_0} \to F_*\mathcal{C}_s^\vee(DR_{X_0})$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} F_*Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0} \arrow[r, "DC_1"] \arrow[dr, "DC_0=can"'] & F_*\mathcal{C}_s^\vee(DR_{X_0}) \; . \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & F_*DR_{X_0}. \arrow[u, "res"'] \end{tikzcd}$$

Finalement, nous obtenons formellement

$$red \circ DC_2 = res \circ can. \tag{16}$$

Calculons l'application red :

$$red_0 : \quad \begin{array}{ccc} \prod_i F_*\mathcal{O}_{U_i} & \longrightarrow & \prod_i F_*\mathcal{O}_{U_i} \\ (g_i) & \longmapsto & (g_i), \end{array}$$

$$red_1 : \quad \begin{array}{ccc} \prod_i F_*\mathcal{P}(U_{(i,j)}) \bigoplus \prod_i F_*\Omega^1_{U_i} & \longrightarrow & \prod_i F_*\mathcal{O}_{U_{i,j}} \bigoplus \prod_i F_*\Omega^1_{U_i} \\ (k_{i,j}) \bigoplus (\omega_i) & \longmapsto & \tau_{i,j}(k_{i,j}) \bigoplus (\omega_i), \end{array}$$

où $\tau_{i,j}$ est l'application de réduction canonique : $F_*\mathcal{P}(U_{(i,j)}) \to F_*\mathcal{O}_{U_{i,j}}$, correspondant au fait que $\mathcal{O}_{U_{i,j}} \simeq \mathcal{P}(U_{(i,j)})/J_{i,j}$.

Proposition 3.4.8. *Le diagramme suivant est commutatif : (niveau 0)*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X_0'}[-1] \arrow[r, "w"] \arrow[d, "DI_e^{(0)}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K^\bullet \arrow[d, "\Phi_e^{(1)}"] \\ F_*\mathcal{C}_s^\vee(DR_{X_0}) & E^\bullet. \arrow[l, two heads, "red"] \end{tikzcd}$$

Démonstration. Nous reprenons la description 14 du complexe $K^\bullet$. En particulier, son terme K^0 est canoniquement isomorphe à $\prod_i \mathcal{O}_{U_i'}$. Soit f une section locale de $\mathcal{O}_{X_0'}$, alors

$$\begin{aligned} w_0(f) &= (f_{|U_i'}) \in K^0, \\ \Phi_0^{(1)} \circ w_0(f) &= (F(f_{|U_i'})) \in E^0 \\ red_0 \circ \Phi_0^{(1)} \circ w_0(f) &= (F(f_{|U_i'})), \\ &= DI_0^{(1)}(f) \end{aligned}$$

□

Proposition 3.4.9. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \Omega^1_{X_0'}[-1] \arrow[r, "w"] \arrow[d, "DI_e^{(1)}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K^\bullet \arrow[d, "\Phi_e^{(1)}"] \\ F_*\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0}) & E^\bullet. \arrow[l, two heads, "red"] \end{tikzcd}$$

Démonstration. Nous reprenons la description 14 du complexe $K^\bullet$. Soit $\omega \in \Omega^1_{X'_0}$, qu'on écrit localement comme $\omega = bdc$, i.e. $\omega = \overline{1 \otimes bc - c \otimes b}$, avec $b, c \in \mathcal{O}_{X'_0}$. Il suffit, par linéarité, de montrer que $red_1 \circ \Phi_e^{(1)} \circ w_1(dc) = DI_e^{(1)}(dc)$, pour toute section locale c de $\mathcal{O}_{X'_0}$. Dans la suite, nous prenons $\omega = dc$. Nous identifions à nouveau comme en 2.4.3 le faisceau $\Omega^1_{U'_{i,j}}$ à $J_{i,j}/J^{[2]}_{i,j}$, et dc à $\overline{1 \otimes c - c \otimes 1}$ (le surlignage indique que l'on prend la classe modulo $J^{[2]}_{i,j}$). Alors on a

$$\Phi_e^{(1)} : K^1 = \prod_{i<j} \Omega^1_{U'_{i,j}} \bigoplus \prod_i \Omega^1_{U'_i} \to \prod_{i<j} F_* \mathcal{P}(U_{(i,j)}) \bigoplus \prod_i F_* \Omega^1_{U_i},$$
$$\text{et } DI_e^{(1)} : \Omega^1_{X'_0} \to \prod_{i<j} F_* \mathcal{O}_{U_{i,j}} \bigoplus \prod_i F_* \Omega^1_{U'_i}.$$

Dans la suite, on compare les applications $red \circ \Phi_e^{(1)} \circ w_1$ composante par composante. On note $p_{i,j}$ les projections $E^1 \to F_* \mathcal{P}(U_{(i,j)})$ (resp. de $F_* \mathcal{C}^{\vee 1}(DR_{X_0}) \to F_* \mathcal{O}(U_{i,j})$), et p_i les projections $E^1 \to F_* \Omega^1_{U_i}$ (resp. de $F_* \mathcal{C}^{\vee 1}(DR_{X_0}) \to F_* \Omega^1_{U_i}$).

Le Frobenius divisé $\Phi_e^{(1)}$ se calcule composante par composante. On sait que

$$w_1(\omega) = (\omega_{|U'_i}) \bigoplus (\omega_{|U'_{i,j}}).$$

Pour calculer $p_{i,j} \circ \Phi_e^{(1)}(\omega)$, il faut prendre un relèvement local $\tilde{c}$ de c dans $\mathcal{O}_{X'_1}$, $\tilde{\omega} = \overline{1 \otimes \tilde{c} - \tilde{c} \otimes 1}$ est alors une section locale de $\Omega^1_{X'_1}$. On calcule

$$F_i \times F_j(\tilde{\omega}_{|\mathcal{U}'_{i,j}}) \in p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)}),$$

et on applique m_p^{-1} pour avoir le résultat dans $\mathcal{P}(U_{(i,j)})$. Le résultat ne dépend pas du choix de $\tilde{c}$. On calcule (en notant $\tilde{c} = c_{|\mathcal{U}'_{i,j}}$) :

$$\begin{aligned}(F_i \times F_j)(\tilde{\omega}_{|\mathcal{U}'_{i,j}}) &= (F_i \times F_j)(1 \otimes \tilde{c} - \tilde{c} \otimes 1) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)}),\\ &= 1 \otimes F_j(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}) \otimes 1.\end{aligned}$$

Soit $r_{i,j} = (1 \otimes F_j(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}) \otimes 1) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})$, et γ les puissances divisées sur le PD-idéal $\mathcal{J}_{i,j}$ idéal. Il est clair, d'après la construction de $\Phi_e^{(1)}$ donnée en 2.5, que $r_{i,j} \in p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})$, ce que l'on peut vérifier explicitement.

Lemme 3.4.9.1. $r_{i,j} \in p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})$.

Vérifions ce lemme. Nous savons que $F_j(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}) \in p\mathcal{P}_{(\mathcal{U}_{(i,j)})}$, et

$$1 \otimes \tilde{c}^p - \tilde{c}^p \otimes 1 = (1 \otimes \tilde{c} - \tilde{c} \otimes 1)^p \ mod \ p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)}).$$

Finalement, ceci nous donne

$$\begin{aligned}1 \otimes F_j(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}) \otimes 1 &= 1 \otimes F_i(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}) \otimes 1 + 1 \otimes (F_j(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}))\\ &= 1 \otimes F_i(\tilde{c}) - F_i(\tilde{c}) \otimes 1 \ mod \ p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})\\ &= 1 \otimes \tilde{c}^p - \tilde{c}^p \otimes 1 \ mod \ p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})\\ &= p(p-1)!\gamma(1 \otimes \tilde{c} - \tilde{c} \otimes 1) \ mod \ p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})\\ &= 0 \ mod \ p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})\end{aligned}$$

Observons maintenant que

$$red_1\left(m_p^{-1}(1\otimes F_j(\tilde c)-F_i(\tilde c)\otimes 1)\right)=m_p^{-1}(F_j(\tilde c)-F_i(\tilde c))\ \in \mathcal{O}_{U_{i,j}}.$$

Donc, pour $\omega = dc$ une section locale de $\Omega^1_{X'_0}$, en utilisant l'expression de $DI_e^{(1)}$ donnée en 3.3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned} p_{i,j}\circ red_1\circ \Phi_e^{(1)}\circ w_1(\omega) &= m_p^{-1}(F_j(\tilde c)-F_i(\tilde c))\ \in \mathcal{O}_{U_{i,j}},\\ &= p_{i,j}\circ DI_e^{(1)}(\omega). \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout i, j, ceci achève la démonstration de la proposition. $\square$

Nous terminons par un corollaire qui achève la démonstration du théorème.

Corollaire 3.4.10. *Le diagramme suivant de morphismes dans les catégories dérivées est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
Ru_{X'_0*}\mathcal{J}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_0} \arrow[r, "\Phi^{(1)}_{cris}"] \arrow[d, "can"'] & F_*Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0} \arrow[d, "can"'] \\
\Omega^1_{X'_0} \arrow[r, "DI^{(1)}"] & F_*DR_{X_0}.
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Les propositions 3.4.5 et 3.4.9 nous donnent le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
Ru_{X'_0*}(\mathcal{J}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_0}) \arrow[rrrr, "can"] \arrow[drr, "DC'_2"'] \arrow[dd, "\Phi^{(1)}_{cris}"] & & & & \Omega^1_{X'_0}[-1] \arrow[dll, "w"] \arrow[dd, "DI_e^{(1)}"] \\
 & & K^\bullet \arrow[dd, "\Phi_e^{(1)}"] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & & \\
F_*Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0} \arrow[drr, "DC_2"] \arrow[ddrr, "can"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & {} \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & F_*\mathcal{C}_s^\vee(DR_{X_0}) \\
 & & E^\bullet \arrow[urr, "red"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & & \\
 & & F_*DR_{X_0}. \arrow[uurr, "res"'] & &
\end{tikzcd}$$

De ce diagramme on déduit les égalités de morphismes de complexes

$$\begin{aligned} res\circ can\circ \Phi^{(1)}_{cris} &= red\circ DC_2\circ \Phi^{(1)}_{cris}\\ &= red\circ \Phi_e^{(1)}\circ DC'_2\\ &= red\circ \Phi_e^{(1)}\circ w\circ can\\ &= DI_e^{(1)}\circ can, \end{aligned}$$

et donc que le diagramme précédent de morphismes dans les catégories dérivées ad hoc est commutatif. $\square$

En particulier, l'égalité des morphismes précédents montre l'égalité des morphismes dans $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$

$$can\circ \Phi^{(1)}_{cris} = DI^{(1)}\circ can,$$

et donc le cas $k=1$ du théorème 3.1.1.

Appliquons maintenant le foncteur $\sigma_{\leq 1}$ au diagramme 9. On note $\Phi_{cris}^{\leq 1} = \sigma_{\leq 1} \circ \Phi_{cris}$ et $DI^{\leq 1} = \sigma_{\leq 1} \circ DI$. Le morphisme DI est un quasi-isomorphisme puisque par passage à la cohomologie il coïncide avec l'isomorphisme de Cartier. Sous l'hypothèse de 1, que X_0 est un S_0-schéma projectif lisse, qui se relève modulo p^2, i.e. qui admet un relèvement projectif lisse sur S_1, nous en déduisons formellement le

Corollaire 3.4.11. *Nous avons les énoncés suivants, en utilisant la notation donnée en 5.*

(i) *Le morphisme* $\Phi_{cris}^{\leq 1} : Ru_{X_0'*}(i_{X_0'}/\mathcal{O}_{X_0'} \bigoplus \mathcal{J}_{X_0'/S_0}/\mathcal{J}^{[2]}_{X_0'/S_0}) \to \sigma_{\leq 1} F_* Ru_{X_0 *}\mathcal{O}_{X_0/S_0}$ *est un quasi-isomorphisme* $D^b(\mathcal{O}_{X_0'})$ *dans* $D^b(\mathcal{O}_{X_0})$.

(ii) *Si* X_0 *est une courbe, le morphisme* Φ_{cris} *est un quasi-isomorphisme de* $D^b(\mathcal{O}_{X_0'})$ *dans* $D^b(\mathcal{O}_{X_0})$.

3.5 Comparaison : le cas général, $k \leq p-2$.

Nous avons vu que le calcul du morphisme de Deligne-Illusie provient de la structure produit sur le complexe de de Rham. Le but des diagrammes commutatifs qui suivent, de 3.5.1 à 3.5.4 est de montrer que le Frobenius cristallin $\Phi_{cris}^{(k)}$ peut aussi se calculer à partir de k fois le produit de $\Phi_{cris}^{(1)}$, dans la catégorie dérivée. La comparaison dans le cas général entre les morphismes de Frobenius cristallins et de Deligne-Illusie se fait alors en se ramenant au cas $k=1$ 3.4.11.

Définissons le morphisme $\Phi^{(k)}$ dans $D^b(\mathcal{O}_{X_0'})$ comme l'unique morphisme faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Ru_{X_0'*}(\mathcal{J}^{[k]}_{X_0'/S_0}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X_0'/S_0}) \arrow[r, "\Phi_{cris}^{(k)}"] \arrow[d, "can"] & F_* Ru_{X_0 *}\mathcal{O}_{X_0/S_0} \arrow[d, "can"] \\
\Omega^k_{X_0'}[-k] \arrow[r, "\Phi^{(k)}"] & F_* DR_{X_0}.
\end{tikzcd}$$

Nous souhaitons montrer que le diagramme suivant de complexes de faisceaux dans la catégorie dérivée est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\left(\Omega^1_{X_0'}[-1]\right)^{\otimes k} \arrow[r, "\Phi^{(1)\otimes k}"] \arrow[d, "Prod"] & (F_* DR_{X_0})^{\otimes^{\mathbf{L}} k} \arrow[d, "Prod"] \\
\Omega^k_{X_0'}[-k] \arrow[r, "\Phi^{(k)}"] & F_* DR_{X_0}.
\end{tikzcd}$$

Dans le cas où X_1 admet un relèvement global du Frobenius c'est facile à voir, mais dans le cas général nous devons utiliser un recouvrement affine de X_1 comme en 3.2.1.

3.5.1 Un premier diagramme commutatif. Nous reprenons ici la construction simpliciale et les notations simpliciales de 3.2.1. Nous noterons $\mathcal{C}^\vee\left(\Omega^1{}_{X'_0}\right)$ le complexe de Cech du faisceau $\Omega^1_{X'_0}$ relativement au recouvrement par les ouverts $U'_{\underline{i}}$, de terme général

$$\bigoplus_{|\underline{i}|=t} j_{\underline{i}*}\Omega^1_{U'_{\underline{i}}}.$$

Les immersions fermées $\beta'{}_{\underline{i}} : U'_{\underline{i}} \to U'_{(\underline{i})}$ induisent un morphisme de schémas simpliciaux entre les schémas simpliciaux $U'_{\underline{i}}$ et $U'_{\underline{i}} \hookrightarrow U'_{(\underline{i})}$. On peut considérer les complexes simpliciaux calculant $Ru_{X_0*}\mathcal{J}^{[k]}_{X'_0/S_0}/\mathcal{J}^{[k+1]}_{X'_0/S_0}$ sur ces deux schémas simpliciaux. A l'étage t du schéma simplicial $U'_{(\bullet)}$ ce complexe est le complexe $\bigoplus_{|\underline{i}|=t}\Omega^k{}_{U'_{\underline{i}}}$, tandis qu'à l'étage t du schéma simplicial $U'_{(\bullet)}$ on a le complexe $\bigoplus_{|\underline{i}|=t}\mathcal{M}^{[k]}_{U'_{(\underline{i})}}$. Reprenons les notations du début de 2.6.1. On rappelle que pour $0 \leq s \leq k$, le s-ième terme de l'étage t de ce complexe simplicial est

$$\mathcal{M}^{[k]}_{U'_{(\bullet)}}(t)_s = \bigoplus_{|\underline{i}|=t} J'{}^{[k-s]}_{\underline{i}}\tilde{\Omega}^s_{U'{}_{(\underline{i})}}/J'{}^{[k+1-s]}_{\underline{i}}\tilde{\Omega}^s_{U'{}_{(\underline{i})}}.$$

En particulier, on dispose de morphismes canoniques de complexes, ou applications de réduction :

$$red:\ \beta'{}^*_{\underline{i}}\mathcal{M}^{[k]}_{U'_{(\underline{i})}} \to \Omega^k_{U'_{\underline{i}}}[-k],$$

qui est nulle, sauf en degré $s = k$ et qui en degré k est donnée par le morphisme canonique $\beta'{}^*_{\underline{i}}\Omega^k_{U'_{(\underline{i})}} \to \Omega^k_{U'_{\underline{i}}}$. Notons β' le morphisme simplicial défini par les $\beta'{}_{\underline{i}*}$. Observons ici que les complexes simpliciaux $\mathcal{M}^{[k]}_{U'_{(\bullet)}}$ sont à support sur le schéma simplicial $U'_\bullet$ de sorte que

$$\mathcal{M}^{[k]}_{U'_{(\bullet)}} \to\simeq \beta'{}_*\beta'{}^*\mathcal{M}^{[k]}_{U'_{(\bullet)}}.$$

Comme les morphismes *red* sont canoniques, ils donnent lieu à un morphisme de complexes simpliciaux

$$red:\ \beta'{}^*\mathcal{M}^{[k]}_{U'_{(\bullet)}} \to \Omega^k_{U'_\bullet}[-k].$$

Les inclusions $j'{}_{\underline{i}}$ induisent un morphisme de schémas simpliciaux $U'_\bullet \hookrightarrow X'_{0\bullet}$, où le deuxième schéma est le schéma simplicial constant égal à X'_0. On remarquera aussi au passage que le complexe simple associé au complexe simplicial

$$j'{}_*\left(\Omega^1_{U'_\bullet}\right)^{\otimes k}$$

est le complexe de Cech

$$\mathcal{C}^\vee\left(\left(\Omega^1_{X'_0}\right)^{\otimes k}\right)$$

relatif au recouvrement par les ouverts $U'_{\underline{i}}$ de X'_0.

Le morphisme produit *Prod* est un morphisme de complexes simpliciaux

$$Prod:\ \left(\mathcal{M}^{[1]}_{U'_{(\bullet)}}\right)^{\otimes^{\mathbf{L}}k} \to \mathcal{M}^{[k]}_{U'_{(\bullet)}},$$

de même pour

$$Prod:\ \left(\Omega^1_{U'_\bullet}\right)^{\otimes k} \to \Omega^k_{U'_\bullet},$$

de sorte que nous pouvons considérer le diagramme suivant de complexes simpliciaux

$$\begin{tikzcd}
\left(\beta'^*\mathcal{M}^{[1]}_{U'_{(\bullet)}}\right)^{\otimes^{\mathbf{L}} k} \arrow[r, "red^{\otimes k}"] \arrow[d, "Prod"] & \Omega^1_{U'_\bullet}[-1]^{\otimes k} . \arrow[d, "Prod"] \\
\beta'^*\mathcal{M}^{[k]}_{U'_{(\bullet)}} \arrow[r, "red"] & \Omega^k_{U'_\bullet}[-k]
\end{tikzcd}$$

On dispose alors du

Lemme 3.5.1.1. *Le diagramme précédent est commutatif.*

Démonstration. La vérification se fait terme à terme et à chaque étage t des complexes simpliciaux, et en ce cas on est ramené au lemme 2.6.1.4. □

A partir du lemme précédent et en passant aux complexes simples associés, on obtient un diagramme commutatif, dont les flèches horizontales sont des quasi-isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
j'_*\beta'^*\left[\mathcal{M}^{[1]}_{U'_{(\bullet)}}{}^{\otimes^{\mathbf{L}} k}\right] \arrow[r, "red^{\otimes k}"] \arrow[d, "Prod"] & \mathcal{C}^\vee\left(\Omega^1_{X'_0}[-1]^{\otimes k}\right) \arrow[d, "Prod"] \\
j'_*\beta'^*\left[\mathcal{M}^{[k]}_{U'_{(\bullet)}}\right] \arrow[r, "red_k"] & \mathcal{C}^\vee\left(\Omega^k_{X'_0}[-k]\right) .
\end{tikzcd}$$

D'autre part, on a une flèche de résolution canonique

$$\Omega^1_{X'_0}{}^{\otimes k} \overset{res}{\to} \mathcal{C}^\vee\left(\Omega^1_{X'_0}\right)^{\otimes k},$$

définie en degré 0 par

$$red(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k) = \left((\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k)_{|U_i}\right).$$

Il est évident que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\vee\left(\Omega^1_{X'_0}[-1]^{\otimes k}\right) \arrow[d, "Prod"] & \Omega^1_{X'_0}[-1]^{\otimes k} \arrow[l, "res"'] \arrow[d, "Prod"] \\
\mathcal{C}^\vee\left(\Omega^k_{X'_0}[-k]\right) & \Omega^k_{X'_0}[-k]. \arrow[l, "res"']
\end{tikzcd}$$

Définissons dans la catégorie dérivée des morphismes $\theta_1 = red^{-1}\circ res$, $\theta_1^{\otimes k} = (red^{\otimes k})^{-1}\circ res$ et

$$\theta_k = red_k^{-1}\circ res:\ \Omega^k_{X'_0}[-k] \to \left[\mathcal{M}^{[k]}_{U'_{(\bullet)}}\right].$$

La commutativité des diagrammes précédents entraîne alors que dans la catégorie dérivée $D^b(\mathcal{O}_{X_0'})$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\left[j'_*\beta'^*\mathcal{M}^{[1]}_{U'_{(\bullet)}}{}^{\otimes^{\mathbf{L}}k}\right] \arrow[d, "Prod"] & \Omega^1_{X_0'}[-1]^{\otimes k} \arrow[l, "\theta_1^{\otimes k}"'] \arrow[d, "Prod"] \\
\left[j'_*\beta'^*\mathcal{M}^{[k]}_{U'_{(\bullet)}}\right] & \Omega^k_{X_0'}[-k]. \arrow[l, "\theta_k"]
\end{tikzcd}$$

3.5.2 Un deuxième diagramme commutatif. Le deuxième diagramme commutatif que nous devons considérer est analogue au premier et on démontre exactement de la même façon que le premier qu'il est commutatif. Soit $\beta_{\underline{i}}$ l'inclusion de $U_{\underline{i}}$ dans $U_{(\underline{i})}$ et β le morphisme de schémas simpliciaux $U_\bullet \hookrightarrow U_{(\bullet)}$ défini par des applications. Les complexes de faisceaux $\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}$ sont à support dans $U_\bullet$, ce qui se traduit par le fait que $\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}} \simeq \beta_*\beta^*\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}$. On note $c_{\underline{i}}$ le morphisme canonique

$$\beta_{\underline{i}}^*\tilde{\Omega}^s_{U_{(\underline{i})}} \to \Omega^s_{U_{\underline{i}}},$$

déduit de l'immersion fermée $U_{\underline{i}} \hookrightarrow U_{(\underline{i})}$. Pour $0 \leq s \leq k$, on rappelle aussi que

$$\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}(t)_s = \bigoplus_{|\underline{i}|=t} \tilde{\Omega}^s_{U_{(\underline{i})}}.$$

A chaque étage t du schéma simplicial $U_{(\bullet)}$, on dispose donc d'applications canoniques de réduction $red : \beta^*\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}} \to DR_{U_\bullet}$ définies terme à terme, sur une section locale $1\otimes\omega$ de $\tilde{\Omega}^s_{U_{(\underline{i})}}$ par $red(1\otimes\omega) = c_{\underline{i}}(1\otimes\omega)$. Comme précédemment, le morphisme $Prod : \mathcal{E}^{\otimes^{\mathbf{L}}k}_{U_{(\bullet)}} \to \mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}$ (resp. $DR^{\otimes^{\mathbf{L}}k}_{U_\bullet} \to DR_{U_\bullet}$) est un morphisme de complexes simpliciaux. Pour $\underline{i}$ fixé, le complexe $j_{\underline{i}*}DR_{U_{\underline{i}}}$, resp. $j_{\underline{i}*}\beta^*\mathcal{E}_{U_{(\underline{i})}}$, resp. $j_{\underline{i}*}DR^{\otimes^{\mathbf{L}}k}_{U_{\underline{i}}}$, resp. $j_{\underline{i}*}\beta^*\mathcal{E}^{\otimes^{\mathbf{L}}k}_{U_{(\underline{i})}}$. est un complexe de faisceaux sur X_0, de sorte que les complexes $\bigoplus_{\underline{i}} j_{\underline{i}*}DR_{U_{\underline{i}}}$, $\bigoplus_{\underline{i}} j_{\underline{i}}\beta^*\mathcal{E}_{U_{(\underline{i})}}$, $\bigoplus_{\underline{i}} j_{\underline{i}*}DR^{\otimes^{\mathbf{L}}k}_{U_{\underline{i}}}$, $\bigoplus_{\underline{i}} j_{\underline{i}*}\beta^*\mathcal{E}^{\otimes^{\mathbf{L}}k}_{U_{(\underline{i})}}$ forment des complexes simpliciaux sur le schéma simplicial constant $X_{0\bullet}$. Les complexes simples associés seront notés respectivement $\left[DR_{U_\bullet}\right]$, $\left[DR^{\otimes^{\mathbf{L}}k}_{U_\bullet}\right]$, $\left[\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}\right]$, $\left[\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}{}^{\otimes^{\mathbf{L}}k}\right]$.

De plus, il vient du lemme 2.6.1.3 que le morphisme de reduction red commute au morphisme $Prod$, terme à terme, à chaque étage du schéma simplicial $U_\bullet$. On en déduit, en passant aux complexes simples associés que le diagramme suivant est commutatif, dont les flèches horizontales sont des quasi-isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
\left[j_*\beta^*\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}{}^{\otimes^{\mathbf{L}}k}\right] \arrow[r, "red^{\otimes k}"] \arrow[d, "Prod"] & \left[j_*DR^{\otimes^{\mathbf{L}}k}_{U_\bullet}\right] \arrow[d, "Prod"] \\
\left[j_*\beta^*\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}\right] \arrow[r, "red"] & \mathcal{C}^\vee(DR_{X_0}).
\end{tikzcd}$$

Fixons un multi-indice $\underline{i}$ de longueur t. L'application canonique de restriction définie par

$$res(\eta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \eta_{i_t}) = \eta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \eta_{i_t|U_{\underline{i}}},$$

induit un morphisme de faisceaux sur X_0 :

$$res : \; DR_{X_0} \to j_{\underline{i}*} DR_{U_{\underline{i}}}.$$

En passant au produit tensoriel dérivé, on obtient une application

$$res^{\otimes k} : \; DR_{X_0}^{\otimes^{\mathbf{L}} k} \to j_{\underline{i}*} DR_{U_{\underline{i}}}^{\otimes^{\mathbf{L}} k}.$$

Ces applications définissent donc des morphismes de complexes de faisceaux sur X_0

$$res : \; DR_{X_0} \to \bigoplus_{|\underline{i}|=t} j_{\underline{i}*} DR_{U_{\underline{i}}}, \text{ resp.}$$

$$res^{\otimes k} : \; DR_{X_0}^{\otimes^{\mathbf{L}} k} \to \bigoplus_{|\underline{i}|=t} j_{\underline{i}*} DR_{U_{\underline{i}}}^{\otimes^{\mathbf{L}} k}.$$

Ces complexes sont le terme général des complexes simpliciaux $j_* DR_{U_\bullet}$, resp. $j_* DR_{U_\bullet}^{\otimes^{\mathbf{L}} k}$ sur le schéma simplicial constant $X_{0_\bullet}$ et les applications res et $res^{\otimes k}$ sont des morphismes de complexes simpliciaux.

Par définition, ces morphismes res sont compatibles à l'application produit $Prod$ (puisque c'est vrai terme à terme). En passant aux complexes simples associés, on a un diagramme commutatif de complexes, dont les lignes horizontales sont des quasi-isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
\left[j_* DR_{U_\bullet}^{\otimes^{\mathbf{L}} k} \right] \arrow[d, "Prod"] & DR_{X_0}{}^{\otimes^{\mathbf{L}} k} \arrow[l, "res^{\otimes k}"'] \arrow[d, "Prod"] \\
\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0}) & DR_{X_0}. \arrow[l, "res"']
\end{tikzcd}$$

Notons maintenant les quasi-isomorphismes dans la catégorie dérivée $D^b(\mathcal{O}_{X_0})$

$$\Theta = red^{-1} \circ res : \; DR_{X_0} \to \left[j_* \beta^* \mathcal{E}_{U_{(\bullet)}} \right],$$

$$\Theta^{\otimes k} = red^{\otimes k^{-1}} \circ res^{\otimes k} : \; DR_{X_0}^{\otimes^{\mathbf{L}} k} \to \left[j_* \beta^* \mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}{}^{\otimes^{\mathbf{L}} k} \right].$$

Des deux diagrammes précédents on déduit que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
DR_{X_0}{}^{\otimes^{\mathbf{L}} k} \arrow[r, "\Theta^{\otimes k}"] \arrow[d, "Prod"] & \left[j_* \beta^* \mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}{}^{\otimes^{\mathbf{L}} k} \right] \arrow[d, "Prod"] \\
DR_{X_0} \arrow[r, "\Theta"] & \left[j_* \beta^* \mathcal{E}_{U_{(\bullet)}} \right].
\end{tikzcd}$$

3.5.3 Un troisième diagramme commutatif. Par fonctorialité, les morphismes de Frobenius induisent des morphismes de complexes simpliciaux

$$\Phi_e^{(1)} : \; \mathcal{M}_{U'_{(\bullet)}}^{[1]} \to F_* \mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}, \text{ resp. } \Phi_e^{(k)} : \; \mathcal{M}_{U'_{(\bullet)}}^{[k]} \to F_* \mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}.$$

Il découle du lemme 2.6.1.1 qu'à chaque étage t des schémas simpliciaux $U'_\bullet$ (resp. $U_\bullet$), les morphismes de Frobenius $\Phi_e^{(1)}$ et $\Phi_e^{(k)}$ sont compatibles aux produits $Prod$. On en déduit, en passant aux complexes simples associés que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\left[j'_*\beta'^*\mathcal{M}^{[1]}_{U'_{(\bullet)}}{}^{\otimes^{\mathbf{L}}k}\right] \arrow[r, "{\Phi_e^{(1)}}^{\otimes k}"] \arrow[d, "Prod"] & F_*\left[j_*\beta^*\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}{}^{\otimes^{\mathbf{L}}k}\right] \arrow[d, "Prod"] \\
\left[j'_*\beta'^*\mathcal{M}^{[k]}_{U'_{(\bullet)}}\right] \arrow[r, "\Phi_e^{(k)}"] & F_*\left[j_*\beta^*\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}\right].
\end{tikzcd}$$

3.5.4 Un dernier diagramme commutatif et démonstration du théorème principal. On considère désormais le diagramme suivant, dont tous les diagrammes extérieurs sont commutatifs, et dont le diagramme extérieur aux flèches doubles est aussi commutatif d'après 2.6.1.1

$$\begin{tikzcd}
\left[j'_*\beta'^*\mathcal{M}^{[1]}_{U'_{(\bullet)}}{}^{\otimes^{\mathbf{L}}k}\right] \arrow[rrr, Rightarrow, "{\Phi_e^{(1)}}^{\otimes k}"] \arrow[ddd, Rightarrow, "Prod"] & & & F_*\left[j_*\beta^*\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}{}^{\otimes^{\mathbf{L}}k}\right] \arrow[ddd, Rightarrow, "Prod"] \\
& \left(\Omega^1_{X'_0}[1]\right)^{\otimes k} \arrow[ul, "\sim", "\theta_1^{\otimes k}"'] \arrow[r, "\Phi^{(1)\otimes k}"] \arrow[d, "Prod"] & (F_*DR_{X_0})^{\otimes^{\mathbf{L}}k} \arrow[ur, "\Theta^{\otimes k}", "\sim"'] \arrow[d, "Prod"] & \\
& \Omega^k_{X'_0}[k] \arrow[r, "\Phi^{(k)}"] \arrow[dl, "\sim"', "\theta_k"] & F_*DR_{X_0} \arrow[dr, "\Theta", "\sim"'] & \\
\left[j'_*\beta'^*\mathcal{M}^{[k]}_{U'_{(\bullet)}}\right] \arrow[rrr, Rightarrow, "\Phi_e^{(k)}"] & & & F_*\left[j_*\beta^*\mathcal{E}_{U_{(\bullet)}}\right].
\end{tikzcd}$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}
\Theta \circ Prod \circ \Phi^{(1)\otimes k} \circ \left(\theta_1^{\otimes k}\right)^{-1} &= Prod \circ \Theta^{\otimes k} \circ \Phi^{(1)\otimes k} \circ \left(\theta_1^{\otimes k}\right)^{-1} \\
&= Prod \circ \Phi_e^{(1)\otimes k},
\end{aligned}$$

et de façon analogue

$$\begin{aligned}
\Theta \circ \Phi^{(k)} \circ Prod \circ \left(\theta_1^{\otimes k}\right)^{-1} &= \Phi_e^{(k)} \circ \theta_k \circ Prod \circ \left(\theta_1^{\otimes k}\right)^{-1} \\
&= \Phi_e^{(k)} \circ Prod.
\end{aligned}$$

On en déduit finalement que le diagramme central du diagramme précédent est commutatif c'est-à-dire que

$$Prod \circ \Phi^{{(1)}^{\otimes k}} = \Phi^{(k)} \circ Prod. \tag{17}$$

Soit $\mathcal{S}$ la section de $Prod$, $\mathcal{S} : \Omega^k_{X'_0} \to {\Omega^1_{X'_0}}^{\otimes k}$. Par définition, puisque $\Phi^{(1)} = DI^{(1)}$ d'après 3.4.11, le morphisme de Deligne-Illusie est le morphisme

$$DI^{(k)} = Prod \circ {\Phi^{(1)}}^{\otimes^k} \circ \mathcal{S}.$$

En composant à droite avec $\mathcal{S}$ l'égalité précédente 17, on trouve que

$$\forall k \leq p-2,\, \Phi^{(k)} = DI^{(k)}.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 3.1.1.

4 Comparaison avec le Frobenius divisé de Mazur modulo p

Nous supposons dans cette section que la condition de Mazur [Maz73] est vérifiée, c'est-à-dire que

$$\forall p, q \geq 0, \text{les groupes } H^p(X, \Omega^q_X) \text{ sont des } W\text{-modules libres de rang fini.} \tag{18}$$

C'est par exemple le cas si X_0 est une courbe projective lisse, une variété abélienne, ou une surface $K3$. Sous ces conditions la suite spectrale de Hodge vers de Rham pour X sur $S = \text{spec } W$ dégénère d'après [Del68]. En particulier les groupes de cohomologie de de Rham $H^*_{DR}(X/S)$ et donc aussi les groupes de cohomologie cristalline sont sans torsion. Soit $\mathcal{C}_i$ le tronqué bête du complexe de de Rham

$$\mathcal{C}_i :\ 0 \to \ldots \to 0 \to \Omega^i_X \to \ldots \to \Omega^N_X \to 0,$$

alors la dégénerescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham nous donne des suites exactes, pour tout $m \geq 0$,

$$0 \to R^m\Gamma(X, \mathcal{C}_{i+1}) \to R^m\Gamma(X, \mathcal{C}_i) \to H^m(X, \Omega^i_X) \to 0. \tag{19}$$

Enfin, sous ces conditions, la suite exacte des coefficients universels (7.25 de [BO78]) nous dit que pour tous $n, m, i \geq 0$,

$$W/p^{n+1}W \otimes_W H^m(X, \Omega^i_X) \simeq H^m(X_n, \Omega^i_{X_n}), \text{et}$$
$$H^m_{DR}(X) \otimes_W W/p^{n+1}W \simeq H^m_{DR}(X_n).$$

Pour définir le Frobenius divisé de Mazur, on se fixe un scindage $\tau = \bigoplus \tau_i$ compatible à la filtration de Hodge, c'est-à-dire que τ_i est un scindage de la surjection canonique $R^n\Gamma(X', \mathcal{C}_i) \twoheadrightarrow H^{n-i}(X', \Omega^i_{X'})$. Dans ce cas, on note encore τ_i l'application : $H^{n-i}(X', \Omega^i_{X'}) \to H^n_{DR}(X')$.

Le Frobenius cristallin donne un morphisme dans la catégorie dérivée des faisceaux de groupes abéliens $F : DR_{X'0} \to DR_{X_0}$. Il résulte de 2.5.2 que le morphisme $m_p^{-i} \circ F$ induit un morphisme dans la catégorie dérivée : $\Psi^{(i)} : \mathcal{C}_i \to DR_X$. Le Frobenius divisé de Mazur

$\Phi_M^{(i)} : H^{n-i}(X', \Omega^i_{X'}) \to DR_X$ est alors défini comme $\Phi_M^{(i)} = \Psi^{(i)} \circ \tau_i$ en degré i. Le Frobenius divisé de Mazur est défini comme

$$\Phi_M = \bigoplus_{i=0}^{n} \Phi_M^{(i)} : \bigoplus_{i=0}^{n} H^{n-i}(X', \Omega^i_{X'}) \to H^n_{DR}(X).$$

Réduisons $\Phi_M^{(i)}$ (resp. Φ_M) modulo p, d'après les propriétés rappelées en 4, on obtient

$$\overline{\Phi}_M^{(i)} : H^{n-i}(\Omega^i_{X'_0}) \to H^n_{DR}(X_0) \text{ (resp. } \overline{\Phi}_M).$$

Par construction, le morphisme $\Psi^{(i)}$ mod p est le Frobenius divisé cristallin de 7, qui est obtenu par passage au quotient, de sorte que $\overline{\Psi}^{(i)} = W/pW \otimes_W \Psi^{(i)}$ induit un morphisme dans la catégorie dérivée

$$\overline{\Psi}^{(i)} : W/pW \otimes_W \mathcal{C}_i/\mathcal{C}_{i+1} \to DR_{X_0}.$$

En passant au foncteur dérivé du foncteur section globale, on trouve

$$\overline{\Psi}^{(i)} : H^{n-i}(X'_0, \Omega^i_{X'0}) \to H^n_{DR}(X_0),$$

qui coıïcide par construction avec la réduction mod p du Frobenius divisé de Mazur en degré i. En particulier, on voit que ce morphisme est indépendant du choix du scindage τ_i. En appliquant le théorème précédent 3.1.1, on trouve donc

Théorème 4.1. *Supposons que X est une variété projective lisse sur S, vérifiant les conditions de Mazur 18.*

(i) Le Frobenius divisé mod p de Mazur est indépendant du choix du scindage compatible à la filtration de Hodge.

(ii) Si $p \geq dim(X)+2$, le Frobenius divisé de Mazur mod p sur $H^n_{DR}(X)$, le n-ième groupe de cohomologie de de Rham de X, coïncide avec le composé $R^n\Gamma \circ DI$ (9).

5 Applications à la famille des courbes de Drinfeld

Appliqué à certaines familles de courbes, notamment aux courbes de Drinfeld ou aux courbes hyperelliptiques, le résultat précédent permet de décrire un algorithme menant au calcul explicite du Frobenius divisé de Mazur sur $H^1_{DR}(X_0)$ via la méthode de Deligne-Illusie. Le calcul du (φ, Γ)-module associé repose alors essentiellement sur le calcul de l'inverse d'une matrice [HW14].

5.1 Généralités

La situation générale que nous considérons ici est un cas particulier de celle décrite dans la section précédente, à savoir une courbe propre et lisse X_0 sur $\operatorname{spec} k$ se relevant en X

projectif et lisse sur spec W. La suite spectrale de Hodge vers de Rham dégénère et le choix d'un scindage τ_0 détermine un isomorphisme

$$H^0(X', \Omega^1_{X'}) \oplus H^1(X', \mathcal{O}_{X'}) \xrightarrow{\sim} H^1_{dR}(X').$$

Nous disposons alors du Frobenius divisé de Mazur

$$\Phi_M = \Phi_M^{(1)} \oplus \Phi_M^{(0)} : H^0(X', \Omega^1_{X'}) \oplus H^1(X', \mathcal{O}_{X'}) \to H^1_{DR}(X)$$

et sa réduction modulo p,

$$\overline{\Phi}_M : H^0(X'_0, \Omega^1_{X'_0}) \oplus H^1(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0}) \to H^1_{DR}(X_0),$$

qui ne dépend pas du choix du scindage τ_0.

D'autre part, le schéma X_1 étant un relèvement plat de X_0 sur W_2, l'application de Deligne et Illusie ([DI87])

$$DI : \oplus_{0 \leq i < p} \Omega^i_{X'_0}[-i] \to F_* DR_{X_0}$$

est un quasi-isomorphisme et induit un isomorphisme

$$H^0(X'_0, \Omega^1_{X'_0}) \oplus H^1(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0}) \xrightarrow{\sim} H^1_{dR}(X_0)$$

qui n'est autre que $\overline{\Phi}_M$ par le théorème 4.1.

Rappelons brièvement la méthode, qui utilise le complexe de Cech, dans le cas où la courbe X_0 admet un recouvrement $\mathcal{U}$ constitué de deux ouverts affines lisses notés U_0 et V_0. Ces deux ouverts se relèvent en U_1 et V_1 constituant un recouvrement affine lisse de X_1 sur W_2. Le Frobenius sur X_0 se relève alors séparément sur chacun des deux ouverts U_1 et V_1 en des application notées F_{U_1} et F_{V_1}. Notons $\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^\cdot_{X_0})$ le complexe simple associé au bicomplexe de Cech du recouvrement $\mathcal{U}$. Le morphisme $\Omega^\cdot_{X_0} \to \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^\cdot_{X_0})$ est un quasi-isomorphisme et induit un isomorphisme

$$H^i_{dR}(X_0) \simeq H^i(\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^\cdot_{X_0})).$$

De même $F_*\Omega^\cdot_{X_0} \to F_*\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^\cdot_{X_0})$ est un quasi-isomorphisme, d'où la description suivante de DI :

- en degré 0, $DI^{(0)} : \mathcal{O}_{X'_0} \to F_*\mathcal{O}_U \oplus F_*\mathcal{O}_V$ est l'application σ-linéaire de k-algèbres qui envoie x sur x^p.
- en degré 1, $DI^{(1)} = (f_U, f_V, h) : \Omega^1_{X'_0} \to F_*\Omega^1_{U_0/k} \oplus F_*\Omega^1_{V_0/k} \oplus F_*\mathcal{O}_{U_0 \cap V_0}$ est induite par l'application qui localement vérifie

$$\begin{aligned} f_U(\omega) &= m_p^{-1} \circ dF_{U_1}(\omega_{|U}) \\ f_V(\omega) &= m_p^{-1} \circ dF_{V_1}(\omega_{|V}) \\ h(dx) &= m_p^{-1}\big(F_{V_1}(x) - F_{U_1}(x)\big). \end{aligned}$$

On peut alors identifier $H^1_{DR}(X_0)$ à l'ensemble des classes de triplets $\bar{\eta}$, de représentants

$$\eta = (\omega_U, \omega_V, h) \in \Omega^1_{U_0/k} \times \Omega^1_{V_0/k} \times \mathcal{O}_{U_0 \cap V_0}$$

tels que $(\omega_U)_{|U_0\cap V_0} - (\omega_V)_{|U_0\cap V_0} + dh = 0$, avec pour relations $\bar{\eta} = 0$ si h s'étend en une fonction définie sur U_0 ou sur V_0.

5.2 Les courbes de Drinfeld

Soit n un entier strictement positif, posons $q = p^n$; dans cette partie, k est un corps parfait contenant $\mathbf{F}_{q^2}$ et W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k. Le représentant de Teichmüller fournit un plongement naturel de $\mathbf{F}^\times_{q^2}$ dans W.

On considère la courbe C_k projective et lisse sur $\mathbf{F}_p$, d'équation

$$XY^q - X^qY - Z^{q+1} = 0$$

dans $\mathbf{P}^2$. Le groupe $SL_2(q)$ agit sur $\mathbf{P}^2_k$ via $g \mapsto \begin{pmatrix} & & 0 \\ & g & \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et cette action laisse stable C_k. De plus, si F désigne le Frobenius géométrique agissant sur C_k, les actions de F^n et de $SL_2(q)$ sur C_k commutent entre elles. On dispose également d'une action de $\mathbf{F}^\times_{q^2}$ sur C_k via $\alpha \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-q} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La courbe C_k peut-être recouverte par deux ouverts affines

$$U_0 = \operatorname{spec} k[u_1, u_2] = \operatorname{spec} k[Y, Z]/(Y^q - Y - Z^{q+1})$$
$$V_0 = \operatorname{spec} k[v_1, v_2] = \operatorname{spec} k[X, Z]/(X - X^q - Z^{q+1})$$

avec les changements de carte $u_1 = \frac{1}{v_1}$ et $v_2 = \frac{u_2}{u_1}$.

5.2.1 Cohomologie de de Rham des courbes de Drinfeld Notons C_W la courbe projective et lisse d'équation $XY^q - X^qY - Z^{q+1} = 0$ dans $\mathbf{P}^2_W$; c'est un relèvement de C_k sur W, qui peut aussi être recouvert par deux ouverts affines notés $U_W = \operatorname{spec} W[u_1, u_2]$ et $V_W = \operatorname{spec} W[v_1, v_2]$. L'action de $\mathbf{F}^\times_{q^2}$ se relève en une action sur C_W.

Lemme 5.2.2. *(i) Le Frobenius se relève sur l'ouvert U_1 en une application F_{U_1} définie sur les générateurs par*

$$F_{U_1}(u_1) = u_1^p(1 - \sum_{l=1}^{p-1}(-1)^l\tbinom{p}{l}u_1^{(q-1)(p-l)}) \textit{ et } F_{U_1}(u_2) = u_2^p.$$

(ii) Le Frobenius se relève sur l'ouvert V_1 en une application F_{V_1} définie sur les générateurs par

$$F_{V_1}(v_1) = v_1^p(1 - \sum_{l=1}^{p-1}(-1)^l\tbinom{p}{l}v_1^{(q-1)l}) \textit{ et } F_{V_1}(v_2) = v_2^p.$$

Démonstration. On recherche un relèvement sous la forme

$$F_{U_1}(u_1) = u_1^p(1 + pK(u_1))$$

et $F_{U_1}(u_2) = u_2^p$, et l'on obtient $K(u_1) = -\sum_{l=1}^{p-1}(-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_1^{(q-1)(p-l)}$. $\square$

En utilisant le recouvrement ci-dessus et la cohomologie de Cech, Haastert et Jantzen démontrent la proposition suivante ([HJ90] corollary 2.2 et proposition 2.3), où A représente k, W ou plus généralement un anneau noethérien intègre dans lequel $q^2 - 1$ est inversible.

Proposition 5.2.3. *(i) Le A-module $H^0(C_A, \Omega^1_{C_A})$ est libre de base*

$$\{u_1^a u_2^b (qu_1^{q-1} - 1)^{-1} du_2\ ,\ a \in \mathbf{N},\ b \in \mathbf{N},\ a + b \leq q - 2\};$$

(ii) Le A-module $H^1(C_A, \mathcal{O}_{C_A})$ est libre de base

$$\{[u_1^{-a} u_2^b]\ , 1 \leq a < b \leq q\}.$$

L'action de $\mathbf{F}_{q^2}^\times$ permet de décomposer la cohomologie de de Rham et les groupes de cohomologie de Hodge en sous-espaces propres. Plus précisément, notons $\psi(j)$, pour $j \in \mathbf{Z}$, le caractère de $\mathbf{F}_{q^2}^\times$ défini par $\alpha \mapsto \alpha^j$.

Proposition 5.2.4. *Les décompositions suivantes sont des décompositions en espaces propres de dimension* 1 *pour l'action de $\mathbf{F}_{q^2}^\times$:*

(i) $H^1(C_A, \mathcal{O}_{C_A}) = \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbf{N}^* \\ i+j \leq q}} H^1(C_A, \mathcal{O}_{C_A})_{\psi(-i+qj)}$;

(ii) $H^0(C_A, \Omega^1_{C_A}) = \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbf{N}^* \\ i+j \leq q}} H^0(C_A, \Omega^1_{C_A})_{\psi(i-qj)}$;

(iii) $H^1_{DR}(C_A) = \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbf{N}^* \\ i+j \leq q}} \left(H^1_{DR}(C_A)_{\psi(-i+qj)} \oplus H^1_{DR}(C_A)_{\psi(i-qj)}\right)$.

Remarques 5.2.5. *i)* On vérifie que les caractères aparaissant en *i)* et *ii)* sont tous distincts.

ii) On constate que $\mu = \{\alpha \in \mathbf{F}_{q^2}^\times \mid \alpha^{q+1} = 1\}$ agit sur les ouverts affines et, pour $\alpha \in \mu$, $\alpha(u_1) = [\alpha]^{-(q+1)} u_1 = u_1$ et $\alpha(u_2) = [\alpha]^{-1} u_2$; on en déduit que, pour $1 \leq a < b \leq q$, la classe $[u_1^{-a} u_2^b]$ est un générateur de $H^1(C_A, \mathcal{O}_{C_A})_{\psi(-i+qj)}$ en posant $i = b - a$ et $j = a$.

iii) De la même manière, on obtient un générateur de $H^0(C_A, \Omega^1_{C_A})_{\psi(i-qj)}$ en considérant $u_1^a u_2^b (qu_1^{q-1} - 1)^{-1} du_2$ avec les relations $i = q - 1 - a - b$ et $j = 1 + a$.

iv) La proposition permet de construire un scindage naturel τ_0 : pour $u \in H^1(C_A, \mathcal{O}_{C_A})_{\psi(-i+qj)}$, choisissons $\tau_0(u)$ comme l'unique élément de $H^1_{DR}(C_A)_{\psi(-i+qj)}$ d'image u par la surjection. Le scindage τ_0 étant fixé, il en est de même de l'isomorphisme $H^0(C'_A, \Omega^1_{C'_A}) \oplus H^1(X', \mathcal{O}_{C'_A}) \simeq H^1_{dR}(C'_A)$ et, via cet isomorphisme, nous assimilons Φ_M à une application de $H^1_{DR}(C'_A)$ vers $H^1_{DR}(C_A)$.

Compte tenu des remarques ci-dessus, choisissons, pour chaque couple d'entiers strictement positifs (i,j) tels que $i+j \leq q$, le générateur $v(i,j) = u_1^{j-1}u_2^{q-(i+j)}(qu_1^{q-1}-1)du_2$ du W-module $H^0(C_W, \Omega^1_{C_W})_{\psi(i-qj)}$ libre de rang 1 ; l'ensemble $\{v(i,j) \mid 1 \leq i, j \text{ et } i+j \leq q\}$ est une base de $H^0(C_W, \Omega^1_{C_W})$.

De même choisissons le générateur $v(-i,-j) = \tau_0([u_1^{-j}u_2^{i+j}])$ du W-module $H^1_{DR}(C_W)_{\psi(-i+qj)}$ libre de rang 1.

Le fait de remarquer que si $v \in H^1_{DR}(C_W)_{\psi(m)}$, alors $F_{DR}(v) \in H^1_{DR}(C_W)_{\psi(pm)}$, permet à Haastert et Jantzen de décrire comment l'action du Frobenius échange les espaces propres pour l'action de $\mathbf{F}^\times_{q^2}$ ([HJ90] proposition 3.5). On sait alors quels coefficients de la matrice du Frobenius dans la base $(v(i,j), v(-i,-j))$ ne sont pas nuls, sans les calculer. Nous proposons ici un calcul explicite modulo p des coefficients du Frobenius divisé.

Avertissement : les éléments $v(i,j)$ (respectivement $v(-i,-j)$ présents dans cet article correspondent à $v(i-1,j-1)$ (respectivement $v(-(i-1),-(j-1))$ de [HJ90]. Moyennant ce décallage, il n'est pas difficile (mais fastidieux) de vérifier que les calculs ci-dessous sont cohérents avec les résultats de *loc. cit.*.

5.2.6 Algorithme On travaille dans l'anneau $\mathcal{A} = W[u_1, u_2, v_1]$, où u_1, u_2 et v_1 vérifient les relations $u_1^q - u_1 - u_2^{q+1} = 0$ et $u_1v_1 - 1 = 0$. Les calculs impliqués sont des calculs de polynômes dérivés et des combinaisons linéaires. La taille de la matrice, qui est $q(q-1) = p^n(p^n-1)$, grossit très vite en fonction de n, mais on sait a priori grâce à [HJ90] qu'il n'y a que $q(q-1)$ coefficients non nuls à calculer.

Etape 1 – Pour i et j entiers compris entre 1 et $q-1$ tels que $i+j \leq q$, on détermine d'abord un triplet représentant $v(-i,-j)$ dans le complexe de Cech. Pour cela on calcule la différentielle $d(v_1^j u_2^{i+j})$, puis on la décompose en une somme

$$d(v_1^j u_2^{i+j}) = \omega_U(-i,-j) + \omega_V(-i,-j)$$

où ω_U (respectivement ω_V) est défini sur l'ouvert U (respectivement sur V). Le triplet recherché est

$$(-\omega_U(-i,-j), \omega_V(-i,-j), v_1^j u_2^{i+j}).$$

Etape 2 – Calcul de $\overline{\Phi}_M(v(-i,-j))$. On calcule les coefficients a_l et b_l tels que

$$v_1^{pj}u_2^{p(i+j)} = \sum_{l\geq 1} b_l v_1^l u_2^b + \sum_{l \geq 0} a_l u_1^l u_2^b$$

dans l'anneau $\mathcal{A}$, où b est le reste de la division euclidienne de $p(i+j)$ par $q+1$. On pose $h = \sum_{l=1}^{b-1} b_l v_1^l u_2^b$.

Si $h \neq 0$, il existe un unique entier l tel que $h = b_l v_1^l u_2^b$. On a alors

$$\overline{\Phi}_M(v(-i,-j)) = b_l v(-(b-l), -l).$$

Si $h = 0$, on pose $h_U = \sum_{l \geq 0} a_l u_1^l u_2^b$ et on calcule $d(h_U)$. Il existe un unique couple d'entiers (l,m) et $\alpha \in k$ tels que $d(h_U) = -\alpha u_1^l u_2^m du_2$. On a alors

$$\overline{\Phi}_M(v(-i,-j)) = \alpha v(q-1-m-l, l+1).$$

Etape 3 – Calcul de $\overline{\Phi}_M(v(i,j))$. On calcule

$$h_{ij} = u_2^{p(q-i-j+1)} u_1^{p(j-1)} \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} v_1^{l(q-1)},$$

puis, comme dans l'étape 2, les coefficients a_l et b_l tels que

$$h_{ij} = \sum_{l\geq 1} b_l v_1^l u_2^b + \sum_{l\geq 0} a_l u_1^l u_2^b$$

où b est le reste de la division euclidienne de $p(q-i-j+1)$ par $q+1$. On obtient $h_{ij} = h_U + h_V + h$ comme ci-dessus.

Si $h \neq 0$, il existe un unique entier l tel que $h = b_l v_1^l u_2^b$. On a alors

$$\overline{\Phi}_M(v(i,j)) = b_l v(-(b-l), -l).$$

Si $h = 0$, on pose $h_U = \sum_{l\geq 0} a_l u_1^l u_2^b$ et on calcule $d(h_U)$. Il existe un unique couple d'entiers (l,m) et $\alpha \in k$ tels que

$$-u_1^{p(j-1)} u_2^{p(q-i-j)} u_2^{p-1} + d(h_U) = -\alpha u_1^l u_2^m du_2.$$

On a alors

$$\overline{\Phi}_M(v(-i,-j)) = \alpha v(q-1-m-l, l+1).$$

La programmation de cet algorithme permet de déterminer $\overline{\Phi}_M$ une fois fixées les valeurs de p et n. Il est possible de décrire en toute généralité $\overline{\Phi}_M$, ce qui va être exposé dans le reste de cette partie.

5.2.7 Calculs préliminaires Pour tout α compris entre 1 et q, notons $\alpha = \sum_{l=0}^n \alpha_l p^l$ la décomposition en base p de α, avec $0 \leq \alpha_l \leq p-1$.

Lemme 5.2.7.1. *Considérons a et b le quotient et le reste de la division euclidienne de $p\alpha$ par $q+1$.*

a) $a \leq p-1$, $1 \leq b \leq q$ *et* $(b = q \Rightarrow \alpha = p^{n-1})$ *;*

b) si $n \geq 2$ *et* $\alpha \not\equiv 0 \ (p^{n-1})$*, alors* $a = \alpha_{n-1}$ *;*

c) si $n = 1$ *ou* $\alpha \equiv 0 \ (p^{n-1})$*, alors* $a = \alpha_{n-1} - 1$*.*

Considérons à présent r_0 le plus grand entier compris entre 0 et a tel que $0 < pm - a - r(q-1)$ et r_1 le plus grand entier compris entre $-a$ et $p-1$ tel que $0 \leq pm + a - r(q-1)$.

Lemme 5.2.7.2. *(i) Si* $n \geq 2$ *et* $m \not\equiv 0 \ (p^{n-1})$*, alors* $r_0 = m_{n-1}$ *; sinon, lorsque* $a \neq m_{n-1}$*,* $r_0 = m_{n-1} - 1$*.*

(ii) Si $n \geq 2$ *et* $m + 1 \not\equiv 0 \ (p^{n-1})$ *ou* $a + 1 + m_{n-1} < p$*, alors* $r_1 = m_{n-1}$ *; sinon* $r_1 = m_{n-1} + 1$*.*

5.2.8 Calcul de l'action du Frobenius sur la famille $(v(-i,-j))$ Pour i et j des entiers strictement positifs tels que $i+j \leq q$, posons

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i_{n-1}}\tbinom{i_{n-1}+j_{n-1}}{j_{n-1}}.$$

Proposition 5.2.8.1. *(i) Si $p(i+j) \leq q$, alors*

$$\bar{\Phi}_M(v(-i,-j)) = v(-pi,-pj).$$

(ii) Si $n \geq 2$, $p(i+j) > q$, $i \not\equiv 0(p^{n-1})$, $j \not\equiv 0(p^{n-1})$ et si $i+j$ vérifie l'une des conditions suivantes

$$(i+j)_{n-1} = i_{n-1} + j_{n-1} \text{ ou } i+j \equiv 0 \ (p^{n-1}),$$

alors

$$\bar{\Phi}_M(v(-i,-j)) = \gamma_{ij} v(-i',-j')$$

où

$$i' \equiv \sum_{l=0}^{n-2} ((i+j)_l - j_l)p^{l+1} - j_{n-1} \ (q)$$

et

$$j' \equiv \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^{l+1} - i_{n-1} \ (q).$$

Démonstration. Comme la condition de Mazur est vérifiée, on dispose de la suite exacte suivante

$$0 \to H^0(C_k, \Omega^1_{C_k}) \to H^1_{DR}(C_k) \to H^1(C_k, \mathcal{O}_{C_k}) \to 0. \tag{20}$$

Pour tout couple (i,j), l'image de $v(-i,-j)$ dans $H^1(C_k, \mathcal{O}_{C_k})$ est la classe $[u_1^{-j} u_2^{i+j}]$ et l'action de F sur $\mathcal{O}_{C_k}$ est l'élévation à la puissance p. Puisque la suite exacte (20) a un scindage naturel, pour connaître $\bar{\Phi}_M(v(-i,-j))$, il suffit de déterminer la classe de $[u_1^{-jp} u_2^{p(i+j)}]$ dans $H^1(C_k, \mathcal{O}_{C_k})$, lorsque celle-ci n'est pas nulle, en fonction de la base de la proposition 5.2.3.

(i) Supposons $p(i+j) \leq q$; dans ce cas, $[F(u_1^{-j} u_2^{i+j})] = [u_1^{-pj} u_2^{p(i+j)}]$ est un générateur de $H^1(C_k, \mathcal{O}_{C_k})_{\psi(-pi+qp(i+j))}$ et l'on obtient

$$\bar{\Phi}_M(v(-i,-j)) = v(-pi,-pj).$$

(ii) Supposons à présent $p(i+j) > q$ et effectuons la division euclidienne de $p(i+j)$ par $q+1$; on obtient $p(i+j) = a(q+1)+b$ avec $1 \leq a \leq p-1$ et $1 \leq b \leq q-1$ par le lemme 5.2.7.1. Alors

$$u_1^{-pj} u_2^{p(i+j)} = u_1^{-pj} u_2^b (u_1^q - u_1)^a = \sum_{r=0}^{a} (-1)^{a-r} \tbinom{a}{r} u_1^{a-pj+r(q-1)} u_2^b.$$

Les termes dont la classe n'est pas nulle dans $H^1(C_k, \mathcal{O}_{C_k})$ sont ceux tels que

$$1 \leq pj - a - r(q-1) < b.$$

Puisque $1 \leq b \leq q-1$, il existe au plus un entier r tel que $0 < pj - a - r(q-1) < b$ et s'il en existe un, c'est l'entier r_0 calculé dans le lemme 5.2.7.2, avec $\alpha = i + j$ et $m = j$.

Cherchons à quelle condition l'inégalité $pj - a - r_0(q-1) < b$ est vérifiée et voyons ce que l'on obtient en fonction des conditions des lemmes 5.2.7.1 et 5.2.7.2. Or

$$\begin{aligned} pj - a - r_0(q-1) - b &= p(i+j) - b - r_0 q - pi - a + r_0 \\ &= (a - r_0 - i_{n-1})q - \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^{l+1} + r_0. \end{aligned}$$

La démonstration se termine par une étude de tous les cas possibles. $\square$

Proposition 5.2.8.2. *Supposons $n = 1$ ou $p(i+j) > q$. Si i et j ne vérifient pas l'une des conditions du point (ii) de la proposition 5.2.8.1, alors*

$$\bar{\Phi}_M(v(-i,-j)) \in H^0(C_k, \Omega^1_{C_k}).$$

Plus précisément, $\bar{\Phi}_M(v(-i,-j)) = c_{i,j} v(i'', j'')$ où

$$\begin{aligned} c_{ij} &= -\gamma_{ij}(i_{n-1} + j_{n-1} + 1) \text{ si } n \geq 2\ ,\ i \not\equiv 0\ (p^{n-1}) \text{ et } j \not\equiv 0\ (p^{n-1}) \\ &= \gamma_{ij} i_{n-1} \text{ si } n \geq 2\ ,\ i \equiv 0\ (p^{n-1}) \text{ et } j \not\equiv 0\ (p^{n-1}) \\ &= -\gamma_{ij} j_{n-1} \text{ si } n \geq 2\ ,\ i \not\equiv 0\ (p^{n-1}) \text{ et } j \equiv 0\ (p^{n-1}) \\ &= \gamma_{ij} \frac{i_{n-1} j_{n-1}}{i_{n-1} + j_{n-1}} \text{ si } n = 1 \text{ ou } i \equiv 0\ (p^{n-1}) \text{ et } j \equiv 0\ (p^{n-1}). \end{aligned}$$

Démonstration. Rappelons qu'un élément de $H^1_{DR}(C_k)$ peut être représenté dans le complexe de Cech relativement aux deux ouverts U et V par un triplet (ω_U, ω_V, f) dans

$$H^0(U_0, \Omega^1_{C_k}) \times H^0(V_0, \Omega^1_{C_k}) \times H^0(U_0 \cap V_0, \mathcal{O}_{C_k})$$

tel que $\omega_U - \omega_V + df = 0$. Le sous-espace $H^0(C_k, \Omega^1_{C_k})$ s'identifie aux triplets tels que $f = 0$.

On vérifie facilement que $(0, 0, u_1^{-pj} u_2^{p(i+j)})$ représente un élément de $H^1_{DR}(C_k)$ que l'on sait être dans $H^0(C_k, \Omega^1_{C_k})$ sous les conditions de la proposition.

Rappelons que pour $0 \leq r \leq r_0$, on a $pj - a - r(q-1) > 0$ et que nous sommes dans le cas où $pj - a - r_0(q-1) \geq b$; alors

$$f_U = \sum_{r=r_0+1}^{a} (-1)^{a-r} \binom{a}{r} u_1^{a-pj+r(q-1)} u_2^b \in H^0(U_0, \mathcal{O}_{C_k})$$

et

$$f_V = \sum_{r=0}^{r_0} (-1)^{a-r} \binom{a}{r} u_1^{a-pj+r(q-1)} u_2^b \in H^0(V_0, \mathcal{O}_{C_k}).$$

On a aussi $f = u_1^{-pj}u_2^{p(i+j)} = f_U + f_V$ et $d(u_1^{-pj}u_2^{p(i+j)}) = 0 = df_U + df_V$. On obtient

$$(0,0,f) = (-df_U, 0, f_U) + (0, df_V, f_V) + (df_U, -df_V, 0)$$

et le fait que $(df_U, -df_V, 0)$ représente la même classe que $(0,0,f)$ dans $H^1_{DR}(C_k)$.

En utilisant la relation $a + b = p(i+j) - qa \equiv 0 \ (p)$, on aboutit à

$$df_U = (-1)^{a-r_0}\tbinom{a}{r_0+1}(r_0+1)u_1^{a-pj+(r_0+1)(q-1)}u_2^{b-1}du_2.$$

On vérifie que l'on est bien dans le cas où

$$a - pj + (r_0+1)(q-1) + b - 1 = pi - aq + (r_0+1)q - (r_0+1) \leq q - 2.$$

Par la remarque (iii) de 5.2.5, $u_1^{a-pj+(r_0+1)(q-1)}u_2^{b-1}du_2$ définit le même espace propre pour l'action de $\mathbf{F}_{q^2}^\times$ que $v(i'', j'')$ où

$$\begin{aligned} i'' &= q - 1 - (a - pj + (r_0+1)(q-1) + b - 1) \\ &= (a - r_0 - i_{n-1})q - \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^{l+1} + r_0 + 1 \\ \text{et } j'' &= 1 + a - pj + (r_0+1)(q-1) \\ &= (r_0 + 1 - j_{n-1})q - \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^{l+1} + a - r_0. \end{aligned}$$

La démonstration s'achève en explicitant $\bar{\Phi}_M(v(-i,-j))$ dans chacune des différentes situations. □

5.2.9 Calcul du Frobenius divisé sur la famille $(v(i,j))$ Rappelons que l'élément $v(i,j) = -u_1^{j-1}u_2^{q-i-j}du_2$, pour i et j strictement positifs tels que $i + j \leq q$, peut être représenté dans le complexe de Cech par le triplet $(-u_1^{j-1}u_2^{q-i-j}du_2, -v_1^{i-1}v_2^{q-i-j}dv_2, 0)$. Son image par l'application de Deligne-Illusie est représentée par le triplet

$$(-u_1^{p(j-1)}u_2^{p(q-i-j)}u_2^{p-1}du_2, -v_1^{p(i-1)}v_2^{p(q-i-j)}v_2^{p-1}dv_2, h_{ij})$$

où

$$h_{ij} = \sum_{l=1}^{p-1}(-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_2^{p(q-i-j+1)}u_1^{p(j-1)-l(q-1)}.$$

Reprenons les notations des calculs préliminaires (5.2.7.1 et 5.2.7.2), pour $\alpha = q - i - j + 1$ et $m = j - 1$. Les lettres a et b désignent respectivement les quotient et reste de la division euclidienne de $p\alpha$ par $q + 1$ et r_1 le plus grand entier r tel que $0 \leq p(j-1) + a - r(q-1)$. Un calcul rapide aboutit à

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= p - (i+j)_{n-1} - 1 \text{ si } i + j \not\equiv 0 \text{ ou } 1 \text{ modulo } p^{n-1} \\ &= p - (i+j)_{n-1} \text{ si } i + j \equiv 0 \text{ ou } 1 \text{ modulo } p^{n-1}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} a &= p - 1 - (i+j)_{n-1} \text{ si } i+j \not\equiv 0 \text{ modulo } p^{n-1} \\ &= p - (i+j)_{n-1} \text{ si } i+j \equiv 0 \text{ modulo } p^{n-1}. \end{aligned}$$

Lemme 5.2.9.1. *(i) Si $j \geq q - p^{n-1} + 1$, alors h_{ij} est définie sur U.*

(ii) Si $i \geq q - p^{n-1} + 1$, alors h_{ij} est définie sur V.

(iii) Si $i \leq q - p^{n-1}$, $j \leq q - p^{n-1}$ et $(r_1+1)(q-1) - a - p(j-1) \geq b$, alors $h_{ij} = h_U + h_V$ où h_U (respectivement h_V) est une fonction définie sur U (respectivement sur V).

(iv) Si $i \leq q - p^{n-1}$, $j \leq q - p^{n-1}$ et $(r_1+1)(q-1) - a - p(j-1) < b$, alors

$$h_{ij} = h_U + c_{ij} u_2^b u_1^{a+p(j-1)-(r_1+1)(q-1)} + h_V$$

où h_U (respectivement h_V) est une fonction définie sur U (respectivement sur V), $u_2^b u_1^{a+p(j-1)-(r_1+1)(q-1)}$ est définie uniquement sur $U \cap V$ et le coefficient vaut

$$c_{ij} = (-1)^{a+r_1+1} \sum_{l=r_1+1}^{\min(p-1,a+r_1+1)} \frac{\binom{p}{l}}{p} \binom{a}{l-r_1-1}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $u_1^r u_2^s$ est définie sur U lorsque r et s sont positifs, est définie sur V lorsque $r < 0$ et $s \leq -r$. On en déduit les cas (i) et (ii).

Les cas (iii) et (iv) reposent sur l'égalité

$$u_2^{p(q-i-j+1)} u_1^{p(j-1)-l(q-1)} = u_2^b (u_1^{q-1} - 1)^a u_1^{a+p(j-1)-l(q-1)}$$

et le fait que lorsque $1 \leq s \leq q$ et $0 < -r < s$, alors la fonction $u_1^r u_2^s$ est définie uniquement sur $U \cap V$. □

Le signe de $a + p(j-1) - (r_1+1)(q-1) + b = q(p - r_1 - 1 - a - i_{n-1}) - \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^{l+1} + r_1 + 1$ est positif dans les cas suivants :

(i) $i \equiv 0 \ (p^{n-1})$;

(ii) $j \equiv 0 \ (p^{n-1})$;

(iii) $i \not\equiv 0 \ (p^{n-1})$, $j \not\equiv 0 \ (p^{n-1})$, $i + j \not\equiv 0 \ (p^{n-1})$ et $(i+j)_{n-1} = i_{n-1} + j_{n-1} + 1$.

Pour l compris entre $j_{n-1} + 1$ et $p - i_{n-1}$, posons

$$\rho_{ij}(l) = (-1)^{p-i_{n-1}} \frac{\binom{p}{l}}{p} \binom{p-1-i_{n-1}-j_{n-1}}{l-j_{n-1}-1}.$$

Proposition 5.2.9.2. *Supposons $n = 1$ ou bien que i et j sont des entiers strictement positifs tels que $i + j \leq q$, $i \leq q - p^{n-1}$ et $j \leq q - p^{n-1}$ et vérifiant l'une des conditions ci-dessus ; alors $\bar{\Phi}_M(v(i,j)) = c_{i,j}v(-i'', -j'')$, où*

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= -\sum_{l=j_{n-1}+1}^{p-1-i_{n-1}} \rho_{ij}(l)\frac{l + i_{n-1}}{1 + i_{n-1} + j_{n-1}} \quad \text{si } n \geq 2\ ,\ i \not\equiv 0\ (p^{n-1}) \text{ et } j \not\equiv 0\ (p^{n-1}) \\
&= \sum_{l=j_{n-1}+1}^{p-i_{n-1}} \rho_{ij}(l) \quad \text{si } n \geq 2\ ,\ i \equiv 0\ (p^{n-1}) \text{ et } j \not\equiv 0\ (p^{n-1}) \\
&= \sum_{l=j_{n-1}+1}^{p-1-i_{n-1}} \rho_{ij}(l)\frac{l + i_{n-1}}{l - j_{n-1}} + (-1)^{i_{n-1}}\frac{\binom{p}{j_{n-1}}}{p} \quad \text{si } n \geq 2\ ,\ i \not\equiv 0\ (p^{n-1}) \text{ et } j \equiv 0\ (p^{n-1}) \\
&= -\sum_{l=j_{n-1}+1}^{p-i_{n-1}} \rho_{ij}(l)\frac{i_{n-1} + j_{n-1}}{l - j_{n-1}} + (-1)^{i_{n-1}}\frac{\binom{p}{j_{n-1}}}{p} \ \text{si } n = 1 \text{ ou } (i \equiv 0\ (p^{n-1}) \text{ et } j \equiv 0\ (p^{n-1})).
\end{aligned}$$

Les entiers i'' et j'' sont les entiers introduits dans la proposition 5.2.8.2.

Démonstration. Par le point iv) du lemme précédent (5.2.9.1), sous les hypothèses de la proposition et si de plus $(r_1 + 1)(q - 1) - a - p(j - 1) < b$, alors

$$\bar{\Phi}_M(v(i,j)) = (-1)^{a+r_1+1} \sum_{l=r_1+1}^{\min(p-1,a+r_1+1)} \frac{\binom{p}{l}}{p} \binom{a}{l-r_1-1} v(-s,-t),$$

où $s = q(p - a - r_1 - 1) - pi + r_1 + 1$ et $t = (r_1 + 1)(q - 1) - a - p(j - 1)$.

Il suffit ensuite d'étudier tous les cas et d'utiliser les lemmes préliminaires 5.2.7.1 et 5.2.7.2 pour obtenir $s = i''$, $t = j''$ et les formules énoncées. □

Lemme 5.2.9.3. *Sous les conditions de (iii) du lemme 5.2.9.1 ci-dessus, lorsque $r_1 \neq 0$ et $a \neq 0$, posons*

$$\begin{aligned}
h_U = &\sum_{l=1}^{r_1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_2^{p(q-i-j+1)} u_1^{p(j-1)-l(q-1)} \\
&+ \sum_{l=r_1+1}^{a+r_1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} \sum_{r=l-r_1}^{a} (-1)^{a-r} \binom{a}{r} u_2^b u_1^{a+p(j-1)-(l-r)(q-1)};
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
dh_U = &\, u_2^{p(q-i-j+1)-1} u_1^{p(j-1)} du_2 \\
&+ (-1)^{a+r_1} \left(\binom{p-1}{r_1-1} + r_1 \sum_{r=1}^{a} \frac{\binom{p}{r_1+r}}{p} \binom{a}{r}\right) u_1^{a+p(j-1)-r_1(q-1)} u_2^{b-1} du_2.
\end{aligned}$$

Remarques

i) Si $a = 0$, on pose $h_U = \sum_{l=1}^{r_1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_2^{p(q-i-j+1)} u_1^{p(j-1)-l(q-1)}$ et l'on obtient

$$dh_U = u_2^{p(q-i-j+1)-1} u_1^{p(j-1)} du_2 + (-1)^{a+r_1} \binom{p-1}{r_1-1} u_2^{b-1} u_1^{p(j-1)-r_1(q-1)} du_2.$$

ii) Si $r_1 = 0$, on pose $h_U = \sum_{l=1}^{a}(-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} \sum_{r=l}^{a}(-1)^{a-r}\binom{a}{r} u_2^b u_1^{a+p(j-1)-(l-r)(q-1)}$ et l'on obtient

$$dh_U = u_2^{p(q-i-j+1)-1} u_1^{p(j-1)} du_2 - (-1)^a u_2^{b-1} u_1^{a+p(j-1)} du_2.$$

Proposition 5.2.9.4. *Soit i et j des entiers strictement positifs tels que $i + j \leq q$.*

(i) Si $j \geq q - p^{n-1} + 1$, alors $\bar{\Phi}_M(v(i,j)) = v(p(i-1)+1, pj - q(p-1))$.

(ii) Si $i \geq q - p^{n-1} + 1$, alors $\bar{\Phi}_M(v(i,j)) = v(pi - q(p-1), p(j-1)+1)$.

(iii) Supposons $i \leq q - p^{n-1}$, $j \leq q - p^{n-1}$, $i \not\equiv 0\ (p^{n-1})$, $j \not\equiv 0\ (p^{n-1})$; si de plus $i+j$ vérifie soit $i + j \equiv 0\ (p^{n-1})$, soit $i_{n-1} + j_{n-1} = (i+j)_{n-1}$, alors $\bar{\Phi}_M(v(i,j)) = c_{ij} v(i', j')$ où

$$i' = \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^{l+1} - j_{n-1}$$
$$j' = \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^{l+1} - i_{n-1}$$

et

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (-1)^{i_{n-1}+1}\left(\binom{p-1}{j_{n-1}-1} + j_{n-1} \sum_{r=1}^{p-1-i_{n-1}-j_{n-1}} \frac{\binom{p}{j_{n-1}+r}}{p} \binom{p-1-i_{n-1}-j_{n-1}}{r}\right) \text{ si } p^{n-1} < j \\ &= (-1)^{i_{n-1}} \text{ sinon .} \end{aligned}$$

Démonstration. (i) Supposons $j \geq q - p^{n-1} + 1$; alors par le lemme 5.2.9.1, $\sum_{l=1}^{p-1}(-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_2^{p(q-i-j+1)} u_1^{p(j-1)-l(q-1)}$ est une fonction h_U définie sur l'ouvert U. On en déduit que l'image de $v(i,j)$ est aussi représentée par le triplet

$$(-u_1^{p(j-1)} u_2^{p(q-i-j)} u_2^{p-1} du_2 + dh_U, v_1^{p(i-1)} v_2^{p(q-i-j)} v_2^{p-1} dv_2, 0),$$

d'où le résultat.

(ii) Supposons $i \geq q - p^{n-1} + 1$; alors alors par le lemme 5.2.9.1, $\sum_{l=1}^{p-1}(-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_2^{p(q-i-j+1)} u_1^{p(j-1)-l(q-1)}$ est une fonction h_V définie sur l'ouvert V. On en déduit que l'image de $v(i,j)$ est aussi représentée par le triplet

$$(-u_1^{p(j-1)} u_2^{p(q-i-j)} u_2^{p-1} du_2, v_1^{p(i-1)} v_2^{p(q-i-j)} v_2^{p-1} dv_2 - dh_V, 0),$$

d'où le résultat.

(iii) Sous ces hypothèses, $a = p - 1 - i_{n-1} - j_{n-1}$ et $r_1 = j_{n-1}$. Rappelons que $\bar{\Phi}_M(v(i,j))$ est représenté par

$$(-u_1^{p(j-1)} u_2^{p(q-i-j)} u_2^{p-1} du_2 + dh_U, v_1^{p(i-1)} v_2^{p(q-i-j)} v_2^{p-1} dv_2 - dh_V, 0) + (-dh_U, dh_V, h_{ij}).$$

L'hypothèse $p^{n-1} < j$ implique que $r_1 \neq 0$. Le lemme 5.2.9.3 permet de conclure que

$$\begin{aligned} &- u_1^{p(j-1)} u_2^{p(q-i-j)} u_2^{p-1} du_2 + dh_U \\ =&(-1)^{a+r_1}\left(\binom{p-1}{r_1-1} + r_1 \sum_{r=1}^{a} \frac{\binom{p}{r_1+r}}{p} \binom{a}{r}\right) u_1^{a+p(j-1)-r_1(q-1)} u_2^{b-1} du_2. \end{aligned}$$

Une analyse des différentes situations possibles conduit à la proposition. □

Les calculs montrent que la situation est beaucoup plus simple si $n = 1$.

Corollaire 5.2.10. *Supposons $q = p$; pour i et j tels $1 \leq i$, $1 \leq j$ et $i + j \leq p$, les droites engendrées par $v(i,j)$ et $v(-j,-i)$ sont échangées par $\bar{\Phi}_M$. En particulier, la courbe ne peut pas être ordinaire.*

5.3 (φ, Γ)-module associé

5.3.1 Rappels sur les (φ, Γ)-modules Notons $K = \operatorname{Frac} W$ et considérons la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique K_∞ de K contenue dans $\bar{K}$; soit Γ le groupe de Galois de K_∞/K, qui est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$, et choisissons-en un générateur topologique, noté γ. On munit l'anneau $R = W[[T]]$ d'une action de Γ telle que $\gamma(T) - T = \alpha(p + T)T$, où α est une unité de R, qui est congrue à une unité de $\mathbf{Z}_p$ modulo T et à 1 modulo (p, T). Dans ces conditions, il existe une unique action de Frobenius, notée φ, commutant à l'action de Γ, compatible avec le Frobenius sur W, qui relève l'élévation à la puissance p modulo p et telle que $\varphi(T) = u(p + T)^{p-1}T$, où $u \equiv 1$ modulo pR (pour un exposé détaillé des propriétés de R, voir [Fon90], 3.2, [Fon94], ou [Wac97], 3.1.1.).

Un (φ, Γ)-module sur R est un R-module de type fini muni d'actions de φ et de Γ, semi-linéaires par rapport aux actions respectives sur R et commutant entre elles.

On peut associer à une courbe projective et lisse X sur W un (φ, Γ)-module de la façon suivante. On dispose du Frobenius divisé

$$\Phi_M : H^1_{DR}(X') \to H^1_{DR}(X),$$

associé à une section τ_0.

Choisissons $(e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$ une base de $H^1_{DR}(X)$ adaptée à la filtration de Hodge, c'est-à-dire telle que $(\bar{e}_i)_{1 \leq i \leq 2g}$ soit une base de $\operatorname{Gr} H^1_{DR}(X)$, et notons r_i le plus grand entier tel que $e_i \in \operatorname{Fil}^{r_i} H^1_{DR}(X)$. On sait que $r_i \in \{0, 1\}$ et peut ordonner la base de telle sorte que $r_i = 1$ pour $i = 1, \cdots, g$ et $r_i = 0$ sinon. La base $(e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$ est également une base de $H^1_{DR}(X')$ et le fait que Φ_M soit un isomorphisme implique que la matrice $A = (a_{ij})$, exprimant Φ_M dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$, est inversible.

On définit alors sur le module $N = R \otimes_W H^1_{DR}(X)$ une action de φ par

$$\varphi(1 \otimes e_j) = (p + T)^{r_j} \sum_{i=1}^{2g} a_{ij} 1 \otimes e_i,$$

l'action de Γ sur N étant induite par la proposition suivante (cf [Wac97], 3.1.4, théorème 3) :

Proposition 5.3.1.1. *Il existe sur N une unique action de Γ commutant à φ et triviale modulo T.*

5.3.2 Application à la courbe de Drinfeld La courbe C est une courbe de genre $g = \frac{q(q-1)}{2}$. La base $(v(i,j), v(-i,-j))_{\substack{1\leq i,\ 1\leq j\\ i+j\leq q}}$ de $H^1_{DR}(C_W)$ est une base adaptée à la filtration où $v(i,j) \in \mathrm{Fil}^1 H^1_{DR}(C_W)$.

Notons $e_{q(q-1)+i-qj} = v(i,j)$ (respectivement $e_{-i+qj+1} = v(-i,-j)$). On sait que l'endomorphisme de Frobenius agit sur la base $(v(i,j), v(-i,-j))_{1\leq i, 1\leq j, i+j\leq q}$ en permutant les vecteurs, à un scalaire près (cf [HJ90]). Il existe une permutation s de l'ensemble des entiers compris entre 1 et $q(q-1)$ et des éléments a_l de W tels que pour l compris entre 1 et $q(q-1)$, notons $\Phi_M(e_l) = a_l e_{s(l)}$. Par abus de notation, on désigne $1 \otimes e_i$ dans N par e_i.

Proposition 5.3.2.1. *Chaque vecteur e_l pour $1 \leq l \leq q(q-1)$ est un vecteur propre sous l'action de Γ.*

Démonstration. La démonstration se fait par dévissage, comme celle de la proposition 5.3.1.1.

Modulo T, on sait que $\gamma(e_l) \equiv e_l$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 tel qu'il existe pour tout l compris entre 1 et $q(q-1)$, un élément ρ_l de $W[[T]]$, $\rho_l \equiv 1$ modulo T, tels que

$$\varphi(\rho_l)a_l(p+T)^{r_l} - a_l\gamma(p+T)^{r_l}\rho_{s(l)} \equiv 0 \text{ modulo } T^n(p+T)^{r_l}.$$

Considérons alors $\beta_l \in S$ tel que

$$\varphi(\rho_l)a_l(p+T)^{r_l} - a_l\gamma(p+T)^{r_l}\rho_{s(l)} = T^n(p+T)^{r_l}\beta_l.$$

On recherche des éléments x_l de R tels que

$$T^n(p+T)^{r_l}\beta_l + \varphi(T^n)\varphi(x_l)a_l(p+T)^{r_l} - a_l\gamma(p+T)^{r_l}T^n x_{s(l)} \equiv 0 \text{ modulo } T^{n+1}(p+T)^{r_l}$$

et l'on est ramené à résoudre l'équation

$$\beta_l = a_l x_{s(l)} - u^n p^{n(p-1)} a_l \varphi(x_l).$$

Un dévissage modulo p permet alors de montrer qu'il existe un unique $q(q-1)$-uplet (x_l) d'éléments de W solution. En particulier, il vient $x_{s(l)} = a_l^{-1}\beta_l$ modulo p. □

Dans la section précédente, les coefficients a_l ont été déterminés modulo p. On en déduit la matrice de γ modulo p. Le procédé de calcul étant algorithmique, on peut obtenir les coefficients de l'action de γ modulo p lorsqu'une précision T^m est fixée.

Remarque

Lorsque $q = p$, les espaces stables par φ étant de dimension 2 (cf 5.2.10), il ne doit pas être trop difficile de déterminer les (φ, Γ)-modules irréductibles (cf [Berger10]) , donc les représentations galoisiennes irréductibles associées à la courbe de Drinfeld.

Références

[Berger10] Berger Laurent. On some modular representations of the Borel subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *Compositio Mathematica*, 146(1) : 58–80, 2010.

[Ber74] Pierre Berthelot. *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique* $p > 0$. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 407. Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[Ber96] P. Berthelot. $\mathcal{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 29, p.185–272, 1996.

[BO78] Pierre Berthelot and Arthur Ogus. *Notes on crystalline cohomology.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1978.

[Bre98] Christophe Breuil. Cohomologie étale de p-torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable. *Duke Math. J.*, 95(3) :523–620, 1998.

[Del68] P. Deligne. Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (35) :259–278, 1968.

[DI87] Pierre Deligne and Luc Illusie. Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham. *Invent. Math.*, 89(2) :247–270, 1987.

[FM87] Jean-Marc Fontaine and William Messing. p-adic periods and p-adic étale cohomology. In *Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985)*, volume 67 of *Contemp. Math.*, pages 179–207. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[Fon90] Jean-Marc Fontaine. Représentations p-adiques des corps locaux. I. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 249–309. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Fon94] Jean-Marc Fontaine. Le corps des périodes p-adiques. *Astérisque*, (223) :59–111, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[God73] Roger Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Hermann, Paris, 1973. Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252.

[HJ90] Burkhard Haastert and Jens Carsten Jantzen. Filtrations of the discrete series of $\mathrm{SL}_2(q)$ via crystalline cohomology. *J. Algebra*, 132(1) :77–103, 1990.

[HW14] Christine Huyghe and Nathalie Wach. Représentations galoisiennes associées aux courbes hyperelliptiques lisses. *Quaterly Journal of mathematics*, hau019, 2014.

[Ill96] Luc Illusie. Frobenius et dégénérescence de Hodge. In *Introduction à la théorie de Hodge*, volume 3 of *Panor. Synthèses*, pages 113–168. Soc. Math. France, Paris, 1996.

[Kat87] Kazuya Kato. On p-adic vanishing cycles (application of ideas of Fontaine-Messing). In *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, volume 10 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 207–251. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[Ked01] Kiran S. Kedlaya. Counting points on hyperelliptic curves using Monsky-Washnitzer cohomology. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 16(4) :323–338, 2001.

[Liu02] Qing Liu. Algebraic geometry and arithmetic curves. volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*, Oxford University Press, 2002

[Maz73] B. Mazur. Frobenius and the Hodge filtration (estimates). *Ann. of Math. (2)*, 98 :58–95, 1973.

[Wac97] Nathalie Wach. Représentations cristallines de torsion. *Compositio Math.*, 108(2) :185–240, 1997.

Christine Huyghe
IRMA, Université de Strasbourg
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG cedex FRANCE
mél huyghe@math.unistra.fr
http ://www-irma.u-strasbg.fr/~huyghe

Nathalie Wach
IRMA, Université de Strasbourg
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG cedex FRANCE
mél wach@math.unistra.fr
http ://www-irma.u-strasbg.fr/~wach