Des mots et des tresses,. . .

Christian Kassel

Institut de Recherche Mathématique Avancée
CNRS - Université Louis Pasteur
Strasbourg, France

Séminaire des Doctorants
IRMA - Strasbourg
31 mai 2007

De quoi s'agit-il ?

• D'une histoire de mots (à deux lettres)...

où apparaissent des tresses

• Travail en commun avec
Christophe Reutenauer, UQAM, Montréal, Canada

• Article paru dans
Annali di Matematica Pura ed Applicata 186 (2007), 317–339
arXiv : math.GR/0507219

I. UN PEU D’HISTOIRE

Elwin Bruno Christoffel (1829–1900)

- Travaux en géométrie, analyse tensorielle (symboles de Christoffel), théorie des invariants, polynômes orthogonaux, fractions continues, physique (dispersion de la lumière, ondes de choc)
- En poste au Polytechnicum Zurich, TU Berlin, et…
- à Strasbourg
- Après la Guerre franco-prussienne de 1870, l'Alsace-Lorraine a été rattachée à l'Empire allemand
- Nouvelle université à Strasbourg
  En 1872 Christoffel fonde le *Mathematisches Institut*

Elwin Bruno Christoffel (1829–1900)

- Travaux en géométrie, analyse tensorielle (symboles de Christoffel), théorie des invariants, polynômes orthogonaux, fractions continues, physique (dispersion de la lumière, ondes de choc)
- En poste au Polytechnicum Zurich, TU Berlin, et…
- à Strasbourg
- Après la Guerre franco-prussienne de 1870, l'Alsace-Lorraine a été rattachée à l'Empire allemand
- Nouvelle université à Strasbourg
  En 1872 Christoffel fonde le *Mathematisches Institut*

Elwin Bruno Christoffel (1829–1900)

- Travaux en géométrie, analyse tensorielle (symboles de Christoffel), théorie des invariants, polynômes orthogonaux, fractions continues, physique (dispersion de la lumière, ondes de choc)
- En poste au Polytechnicum Zurich, TU Berlin, et…
- à Strasbourg
- Après la Guerre franco-prussienne de 1870, l'Alsace-Lorraine a été rattachée à l'Empire allemand
- Nouvelle université à Strasbourg
  En 1872 Christoffel fonde le *Mathematisches Institut*

Elwin Bruno Christoffel (1829–1900)

- Travaux en géométrie, analyse tensorielle (symboles de Christoffel), théorie des invariants, polynômes orthogonaux, fractions continues, physique (dispersion de la lumière, ondes de choc)
- En poste au Polytechnicum Zurich, TU Berlin, et…
- à Strasbourg
- Après la Guerre franco-prussienne de 1870, l'Alsace-Lorraine a été rattachée à l'Empire allemand
- Nouvelle université à Strasbourg
  En 1872 Christoffel fonde le *Mathematisches Institut*

Elwin Bruno Christoffel (1829–1900)

- Travaux en géométrie, analyse tensorielle (symboles de Christoffel), théorie des invariants, polynômes orthogonaux, fractions continues, physique (dispersion de la lumière, ondes de choc)
- En poste au Polytechnicum Zurich, TU Berlin, et...
- à Strasbourg
- Après la Guerre franco-prussienne de 1870, l'Alsace-Lorraine a été rattachée à l'Empire allemand
- Nouvelle université à Strasbourg
  En 1872 Christoffel fonde le *Mathematisches Institut*

Elwin Bruno Christoffel (1829–1900)

- Travaux en géométrie, analyse tensorielle (symboles de Christoffel), théorie des invariants, polynômes orthogonaux, fractions continues, physique (dispersion de la lumière, ondes de choc)
- En poste au Polytechnicum Zurich, TU Berlin, et…
- à Strasbourg
- Après la Guerre franco-prussienne de 1870, l'Alsace-Lorraine a été rattachée à l'Empire allemand
- Nouvelle université à Strasbourg
  En 1872 Christoffel fonde le *Mathematisches Institut*

Elwin Bruno Christoffel (1829–1900)

- Travaux en géométrie, analyse tensorielle (symboles de Christoffel), théorie des invariants, polynômes orthogonaux, fractions continues, physique (dispersion de la lumière, ondes de choc)
- En poste au Polytechnicum Zurich, TU Berlin, et...
- à Strasbourg
- Après la Guerre franco-prussienne de 1870, l'Alsace-Lorraine a été rattachée à l'Empire allemand
- Nouvelle université à Strasbourg
  En 1872 Christoffel fonde le *Mathematisches Institut*

L'Observatio arithmetica de Christoffel

- *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 6 (1875), 148–152
- Publié en latin (C. a également publié des articles en allemand, français et italien)
- Nom de l'auteur en première page de l'article : auctore E. B. Christoffel, prof. Argentinensi
- *Argentinensi* est dérivé de *Argentoratum*, nom donné par les Romains à Strasbourg au moment de la fondation de la ville

L'Observatio arithmetica de Christoffel

- *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 6 (1875), 148–152
- Publié en latin (C. a également publié des articles en allemand, français et italien)
- Nom de l'auteur en première page de l'article : auctore E. B. Christoffel, prof. Argentinensi
- *Argentinensi* est dérivé de *Argentoratum*, nom donné par les Romains à Strasbourg au moment de la fondation de la ville

L'Observatio arithmetica de Christoffel

- *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 6 (1875), 148–152
- Publié en latin (C. a également publié des articles en allemand, français et italien)
- Nom de l'auteur en première page de l'article : auctore E. B. Christoffel, prof. Argentinensi
- *Argentinensi* est dérivé de *Argentoratum*, nom donné par les Romains à Strasbourg au moment de la fondation de la ville

L'Observatio arithmetica de Christoffel

- *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 6 (1875), 148–152
- Publié en latin (C. a également publié des articles en allemand, français et italien)
- Nom de l'auteur en première page de l'article : auctore E. B. Christoffel, prof. Argentinensi
- *Argentinensi* est dérivé de *Argentoratum*, nom donné par les Romains à Strasbourg au moment de la fondation de la ville

L'Observatio arithmetica de Christoffel

- *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 6 (1875), 148–152
- Publié en latin (C. a également publié des articles en allemand, français et italien)
- Nom de l'auteur en première page de l'article : auctore E. B. Christoffel, prof. Argentinensi
- *Argentinensi* est dérivé de *Argentoratum*, nom donné par les Romains à Strasbourg au moment de la fondation de la ville

L'Observatio arithmetica de Christoffel

- *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 6 (1875), 148–152
- Publié en latin (C. a également publié des articles en allemand, français et italien)
- Nom de l'auteur en première page de l'article : auctore E. B. Christoffel, prof. Argentinensi
- *Argentinensi* est dérivé de *Argentoratum*, nom donné par les Romains à Strasbourg au moment de la fondation de la ville

L'Observatio arithmetica de Christoffel

- *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 6 (1875), 148–152
- Publié en latin (C. a également publié des articles en allemand, français et italien)
- Nom de l'auteur en première page de l'article : auctore E. B. Christoffel, prof. Argentinensi
- *Argentinensi* est dérivé de *Argentoratum*, nom donné par les Romains à Strasbourg au moment de la fondation de la ville

Observatio arithmetica 1

- *Designantibus a, b numeros positivos integros et primos inter se, sint $r_1, r_2, r_3, \ldots$ residua minima non negativa numerorum a, $2a$, $3a, \ldots$ secundum modulum b,...*
- Désignons par a, b des entiers positifs premiers entre eux et soit $r_1, r_2, r_3, \ldots$ les restes de la division de a, $2a$, $3a, \ldots$ par b,...
- *Agitur autem de quaestione, quando r_m crescat vel decrescat, si m unitate augitur...*
- Il s'agit de savoir quand r_m croît ou décroît si m augmente d'une unité...

Observatio arithmetica 1

- *Designantibus a, b numeros positivos integros et primos inter se, sint r_1, r_2, $r_3, \ldots$ residua minima non negativa numerorum a, $2a$, $3a, \ldots$ secundum modulum b,. . .*

- Désignons par a, b des entiers positifs premiers entre eux et soit r_1, r_2, $r_3, \ldots$ les restes de la division de a, $2a$, $3a, \ldots$ par $b, \ldots$

- *Agitur autem de quaestione, quando r_m crescat vel decrescat, si m unitate augitur. . .*

- Il s'agit de savoir quand r_m croît ou décroît si m augmente d'une unité. . .

Observatio arithmetica 1

- *Designantibus a, b numeros positivos integros et primos inter se, sint r_1, r_2, $r_3, \ldots$ residua minima non negativa numerorum a, 2a, 3a, $\ldots$ secundum modulum b,...*
- Désignons par a, b des entiers positifs premiers entre eux et soit r_1, r_2, $r_3, \ldots$ les restes de la division de a, $2a$, $3a, \ldots$ par b,...
- *Agitur autem de quaestione, quando r_m crescat vel decrescat, si m unitate augitur...*
- Il s'agit de savoir quand r_m croît ou décroît si m augmente d'une unité...

Observatio arithmetica 1

- *Designantibus a, b numeros positivos integros et primos inter se, sint r_1, r_2, $r_3, \ldots$ residua minima non negativa numerorum a, 2a, 3a, $\ldots$ secundum modulum b,...*
- Désignons par a, b des entiers positifs premiers entre eux et soit r_1, r_2, $r_3, \ldots$ les restes de la division de a, $2a$, $3a, \ldots$ par b,...
- *Agitur autem de quaestione, quando r_m crescat vel decrescat, si m unitate augitur...*
- Il s'agit de savoir quand r_m croît ou décroît si m augmente d'une unité...

Observatio arithmetica 1

- *Designantibus a, b numeros positivos integros et primos inter se, sint r_1, r_2, $r_3, \ldots$ residua minima non negativa numerorum a, 2a, 3a, $\ldots$ secundum modulum b,...*
- Désignons par a, b des entiers positifs premiers entre eux et soit r_1, r_2, $r_3, \ldots$ les restes de la division de a, $2a$, $3a, \ldots$ par b,...
- *Agitur autem de quaestione, quando r_m crescat vel decrescat, si m unitate augitur...*
- Il s'agit de savoir quand r_m croît ou décroît si m augmente d'une unité...

Observatio arithmetica 1

- *Designantibus a, b numeros positivos integros et primos inter se, sint r_1, r_2, $r_3, \dots$ residua minima non negativa numerorum a, 2a, 3a, $\dots$ secundum modulum b,...*
- Désignons par a, b des entiers positifs premiers entre eux et soit r_1, r_2, $r_3, \dots$ les restes de la division de a, $2a$, $3a, \dots$ par b,...
- *Agitur autem de quaestione, quando r_m crescat vel decrescat, si m unitate augitur...*
- Il s'agit de savoir quand r_m croît ou décroît si m augmente d'une unité...

Observatio arithmetica 2

- *...notatur littera c vel d, prout r_m crescit vel decrescit. Hoc modo nova series nascitur, e duabus tantum literis c, d, sed certo quodam ordine composita...*

- ...on écrit la lettre c ou d suivant que r_m croît ou décroît. De cette manière naît une nouvelle suite, faite des deux lettres c, d, mais arrangée dans un certain ordre...

Observatio arithmetica 2

- *...notatur littera c vel d, prout r_m crescit vel decrescit. Hoc modo nova series nascitur, e duabus tantum literis c, d, sed certo quodam ordine composita...*

- ...on écrit la lettre *c* ou *d* suivant que r_m croît ou décroît. De cette manière naît une nouvelle suite, faite des deux lettres *c*, *d*, mais arrangée dans un certain ordre...

Observatio arithmetica 2

- *…notatur littera c vel d, prout r_m crescit vel decrescit. Hoc modo nova series nascitur, e duabus tantum literis c, d, sed certo quodam ordine composita…*
- …on écrit la lettre c ou d suivant que r_m croît ou décroît. De cette manière naît une nouvelle suite, faite des deux lettres c, d, mais arrangée dans un certain ordre…

Observatio arithmetica 3

- *Exemplum I. Sit* $a = 4$, $b = 11$, *erit series* $(r_.)$ *notis c, d ornata*

$$\begin{array}{lccccccccccc} r_. = & 4 & 8 & 1 & 5 & 9 & 2 & 6 & 10 & 3 & 7 & 0 \\ g_. = & c & d & c & c & d & c & c & d & c & d & c \end{array}$$

- On retrouve les entiers a and b à partir de la suite $(g_.)$:
  - $\star$ a est le nombre de d dans $(g_.)$
  - $\star$ b est la longueur de la suite $(g_.)$
- Le résultat principal de l'article indique comment recouvrer le développement en fraction continue de a/b à partir de $(g_.)$

Observatio arithmetica 3

- *Exemplum I. Sit* $a = 4$, $b = 11$, *erit series* $(r_.)$ *notis c, d ornata*

$$\begin{array}{lccccccccccc} r_. = & 4 & 8 & 1 & 5 & 9 & 2 & 6 & 10 & 3 & 7 & 0 \\ g_. = & c & d & c & c & d & c & c & d & c & d & c \end{array}$$

- On retrouve les entiers a and b à partir de la suite $(g_.)$:
  - ⋆ a est le nombre de d dans $(g_.)$
  - ⋆ b est la longueur de la suite $(g_.)$
- Le résultat principal de l'article indique comment recouvrer le développement en fraction continue de a/b à partir de $(g_.)$

Observatio arithmetica 3

- *Exemplum I. Sit* $a = 4$, $b = 11$, *erit series* $(r_.)$ *notis* c, d *ornata*

$$\begin{array}{ccccccccccccc} r_. & = & 4 & 8 & 1 & 5 & 9 & 2 & 6 & 10 & 3 & 7 & 0 \\ g_. & = & c & d & c & c & d & c & c & d & c & d & c \end{array}$$

- On retrouve les entiers a and b à partir de la suite $(g_.)$:
  - $\star$ a est le nombre de d dans $(g_.)$
  - $\star$ b est la longueur de la suite $(g_.)$
- Le résultat principal de l'article indique comment recouvrer le développement en fraction continue de a/b à partir de $(g_.)$

Observatio arithmetica 4

Les suites de lettres c et d obtenues de cette manière, par exemple

$$cdccdccdcdc\,,$$

sont appelées des mots de Christoffel

Pour commencer,
nous en donnons une construction géométrique

Les mots de Christoffel (et leurs variantes infinies) interviennent en

- mathématiques
  - ⋆ dynamique symbolique (Morse)
  - ⋆ fractions continues
- informatique
  - ⋆ langages formels
  - ⋆ algorithmes sur les mots et combinatoire
  - ⋆ reconnaissance de formes
- physique
  - ⋆ cristallographie
- biologie

II. CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES MOTS DE CHRISTOFFEL

Vecteurs primitifs de $\mathbb{Z}^2$ et mots de Christoffel

- $\binom{p}{q} \in \mathbb{Z}^2$ est primitif si p et q sont premiers entre eux
- A un vecteur primitif $\binom{p}{q}$
  nous allons associer un mot de Christoffel

  $$w = w\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

  formé avec les lettres a, a^{-1}, b, b^{-1} et tel que

  • le nombre "algébrique" d'occurrences de a dans w est p,
  et
  • le nombre "algébrique" d'occurrences de b dans w est q

Vecteurs primitifs de $\mathbb{Z}^2$ et mots de Christoffel

- $\binom{p}{q} \in \mathbb{Z}^2$ est primitif si p et q sont premiers entre eux
- A un vecteur primitif $\binom{p}{q}$
  nous allons associer un mot de Christoffel

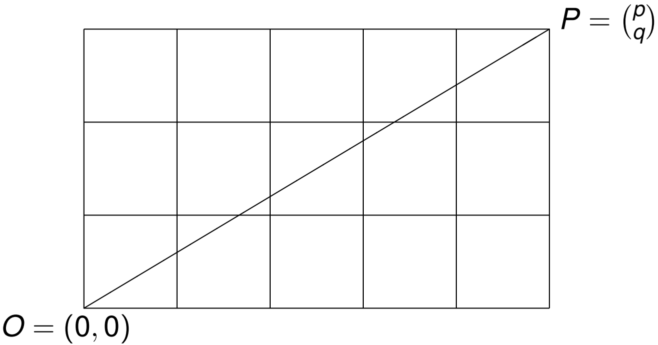
  $$w = w\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

  formé avec les lettres a, a^{-1}, b, b^{-1} et tel que

  • le nombre “algébrique” d’occurrences de a dans w est p,
  et
  • le nombre “algébrique” d’occurrences de b dans w est q

Représentation planaire d'un vecteur primitif

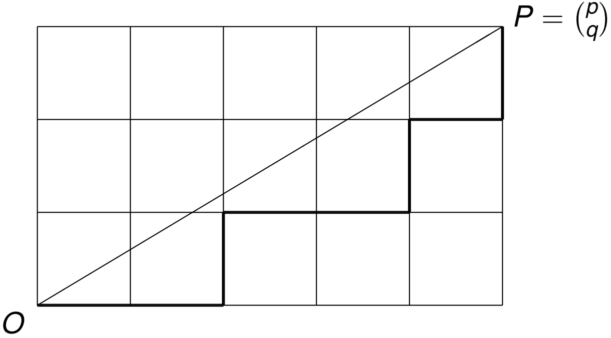
Si $P = \binom{p}{q}$ est primitif, alors $[OP] \bigcap \mathbb{Z}^2 = \{O, P\}$



Approximation par des "escaliers"

Si p, $q \geq 0$, on approche le segment OP

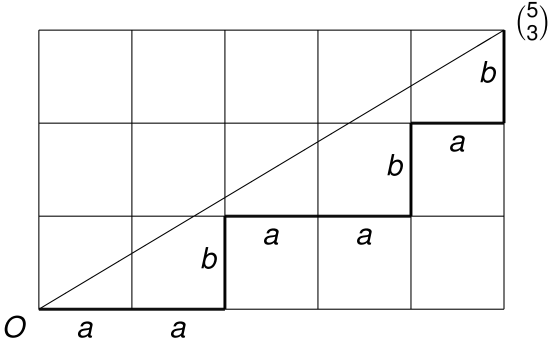
par l'escalier inférieur le plus proche



Mot de Christoffel associé à un vecteur primitif positif

Au vecteur $\binom{5}{3} \in \mathbb{N}^2$ on associe le mot

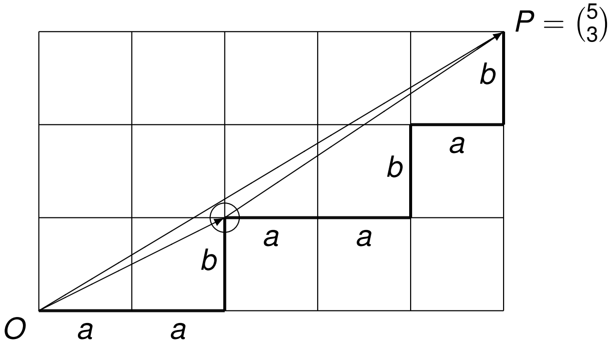
$$w\binom{5}{3} = aabaabab = a^2ba^2bab \in F_2$$



Factorisation canonique d'un mot de Christoffel : 1

◯ : point de $\mathbb{Z}^2$ le plus proche de OP

$$w\binom{5}{3} = (a^2b)(a^2bab) = w\binom{2}{1}\,w\binom{3}{2}$$



Factorisation canonique d'un mot de Christoffel : 2

Théorème.

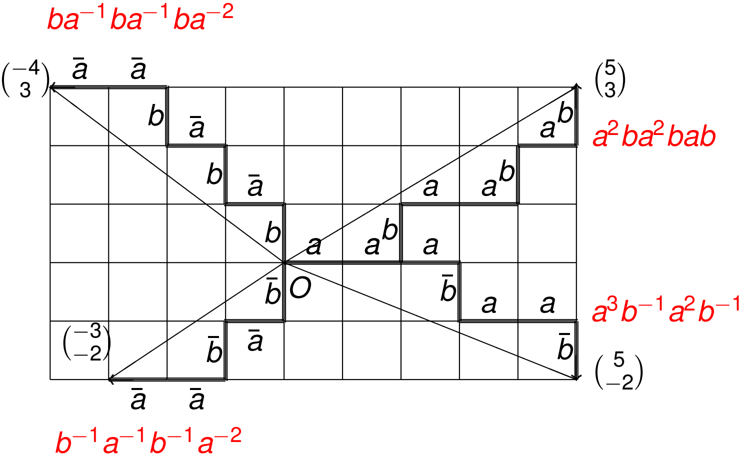
Si $\binom{p}{q}, \binom{r}{s} \in \mathbb{N}^2$ vérifient $\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} = 1$, alors on a

$$w\begin{pmatrix} p+r \\ q+s \end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} w\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

Mots de Christoffel généraux

$\bar{a} = a^{-1}$

$\bar{b} = b^{-1}$



Le groupe F_2

• Les mots en a, a^{-1}, b, b^{-1} forment un groupe, le groupe libre F_2

- $\star$ *Loi de composition :* concaténation
- $\star$ *Elément neutre :* le mot vide
- $\star$ *Identification :*

$$aa^{-1} = a^{-1}a = bb^{-1} = b^{-1}b = 1\,.$$

• Un mot en a, a^{-1}, b, b^{-1} est réduit s'il ne contient pas les sous-suites

$$aa^{-1}, \;\; a^{-1}a, \;\; bb^{-1}, \;\; b^{-1}b\,.$$

Tout élément de F_2 peut être représenté par un unique mot réduit.

Comptage du nombre de a et de b

• Il existe un unique homomorphisme de groupes

$$p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$$

tel que $p(a) = \binom{1}{0}$ et $p(b) = \binom{0}{1}$

• L'homomorphisme p permet de compter algébriquement le nombre d'occurrences de a et de b dans un mot représentant un élément de F_2

Exemple :

$$p(a^{-3}b^5ab^{-2}a) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Objectif : Décrire les bases de F_2

- $\{u, v\} \subset F_2$ est une base de F_2 si $\{u, v\}$ engendre F_2 comme groupe.

  Exemple trivial : $\{a, b\}$ est une base de F_2

- Deux bases $\{u, v\}$ et $\{u', v'\}$de F_2 sont conjuguées s'il existe $w \in F_2$ tel que $u' = wuw^{-1}$ and $v' = wvw^{-1}$

- *Rappel : Description des bases de $\mathbb{Z}^2$*

  $\{\binom{p}{q}, \binom{r}{s}\}$ est une base de $\mathbb{Z}^2 \iff ps - qr = \pm 1$

Objectif : Décrire les bases de F_2

- $\{u, v\} \subset F_2$ est une base de F_2 si $\{u, v\}$ engendre F_2 comme groupe.

  Exemple trivial : $\{a, b\}$ est une base de F_2

- Deux bases $\{u, v\}$ et $\{u', v'\}$de F_2 sont conjuguées s'il existe $w \in F_2$ tel que $u' = wuw^{-1}$ and $v' = wvw^{-1}$

- *Rappel : Description des bases de $\mathbb{Z}^2$*

  $\{\binom{p}{q}, \binom{r}{s}\}$ est une base de $\mathbb{Z}^2 \iff ps - qr = \pm 1$

Objectif : Décrire les bases de F_2

- $\{u, v\} \subset F_2$ est une base de F_2 si $\{u, v\}$ engendre F_2 comme groupe.

  Exemple trivial : $\{a, b\}$ est une base de F_2

- Deux bases $\{u, v\}$ et $\{u', v'\}$de F_2 sont conjuguées s'il existe $w \in F_2$ tel que $u' = wuw^{-1}$ and $v' = wvw^{-1}$

- *Rappel : Description des bases de* $\mathbb{Z}^2$

  $\{\binom{p}{q}, \binom{r}{s}\}$ est une base de $\mathbb{Z}^2 \iff ps - qr = \pm 1$

Relèvement de bases de $\mathbb{Z}^2$ à F_2

- *Notre objectif :* Décrire les bases de F_2 et répondre à la...
- *Question :* Soit $p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ la surjection canonique.
  Peut-on relever une base de $\mathbb{Z}^2$ en une base de F_2 *via* p ?
- *Exemple :*
  - $a^2b \in F_2$ est un relèvement de $\binom{2}{1}$
  - a^3b^2 est un relèvement de $\binom{3}{2}$
  - $\{a^2b, a^3b^2\}$ n'est pas une base de F_2.
  - $\{a^2b, a^2bab\}$ est une base de F_2

Relèvement de bases de $\mathbb{Z}^2$ à F_2

- *Notre objectif :* Décrire les bases de F_2 et répondre à la…
- *Question :* Soit $p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ la surjection canonique.
  Peut-on relever une base de $\mathbb{Z}^2$ en une base de F_2 *via* p ?
- *Exemple :*
  - $a^2b \in F_2$ est un relèvement de $\binom{2}{1}$
  - a^3b^2 est un relèvement de $\binom{3}{2}$
  - $\{a^2b, a^3b^2\}$ n'est pas une base de F_2.
  - $\{a^2b, a^2bab\}$ est une base de F_2

Relèvement de bases de $\mathbb{Z}^2$ à F_2

- *Notre objectif :* Décrire les bases de F_2 et répondre à la...
- *Question :* Soit $p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ la surjection canonique.
  Peut-on relever une base de $\mathbb{Z}^2$ en une base de F_2 *via* p ?
- *Exemple :*
  - $a^2b \in F_2$ est un relèvement de $\binom{2}{1}$
  - a^3b^2 est un relèvement de $\binom{3}{2}$
  - $\{a^2b, a^3b^2\}$ n'est pas une base de F_2,
  - $\{a^2b, a^2bab\}$ est une base de F_2

Relèvement de bases de $\mathbb{Z}^2$ à F_2

- *Notre objectif :* Décrire les bases de F_2 et répondre à la...
- *Question :* Soit $p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ la surjection canonique.
  Peut-on relever une base de $\mathbb{Z}^2$ en une base de F_2 *via* p ?
- *Exemple :*
  - $a^2b \in F_2$ est un relèvement de $\binom{2}{1}$
  - a^3b^2 est un relèvement de $\binom{3}{2}$
  - $\{a^2b, a^3b^2\}$ n'est pas une base de F_2,
  - $\{a^2b, a^2bab\}$ est une base de F_2

Relèvement de bases de $\mathbb{Z}^2$ à F_2

- *Notre objectif :* Décrire les bases de F_2 et répondre à la...
- *Question :* Soit $p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ la surjection canonique.
  Peut-on relever une base de $\mathbb{Z}^2$ en une base de F_2 *via* p ?
- *Exemple :*
  - $a^2 b \in F_2$ est un relèvement de $\binom{2}{1}$
  - $a^3 b^2$ est un relèvement de $\binom{3}{2}$
  - $\{a^2 b, a^3 b^2\}$ n'est pas une base de F_2,
  - $\{a^2 b, a^2 bab\}$ est une base de F_2

Relèvement de bases de $\mathbb{Z}^2$ à F_2

- *Notre objectif :* Décrire les bases de F_2 et répondre à la...
- *Question :* Soit $p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ la surjection canonique.
  Peut-on relever une base de $\mathbb{Z}^2$ en une base de F_2 *via* p ?
- *Exemple :*
  - $a^2b \in F_2$ est un relèvement de $\binom{2}{1}$
  - a^3b^2 est un relèvement de $\binom{3}{2}$
  - $\{a^2b, a^3b^2\}$ n'est pas une base de F_2,
  - $\{a^2b, a^2bab\}$ est une base de F_2

Relèvement de bases de $\mathbb{Z}^2$ à F_2

- *Notre objectif :* Décrire les bases de F_2 et répondre à la…
- *Question :* Soit $p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ la surjection canonique.

  Peut-on relever une base de $\mathbb{Z}^2$ en une base de F_2 *via* p ?
- *Exemple :*
  - $a^2b \in F_2$ est un relèvement de $\binom{2}{1}$
  - a^3b^2 est un relèvement de $\binom{3}{2}$
  - $\{a^2b, a^3b^2\}$ n'est pas une base de F_2,
  - $\{a^2b, a^2bab\}$ est une base de F_2

Une description complète des bases de F_2

Théorème.

- *Si* $\left\{ \binom{p}{q}, \binom{r}{s} \right\}$ *est une base de* $\mathbb{Z}^2$*, alors*

$$\left\{ w\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, w\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \right\}$$

est une base de F_2 *(appelée une base de Christoffel).*

Cette base est un relèvement de $\left\{ \binom{p}{q}, \binom{r}{s} \right\}$ *à* F_2

- *Tout conjugué d'une base de Christoffel est une base de* F_2 *et*
toute base de F_2 *est conjuguée à une (unique) base de Christoffel*

Une description complète des bases de F_2

Théorème.

- *Si* $\left\{\binom{p}{q},\binom{r}{s}\right\}$ *est une base de* $\mathbb{Z}^2$*, alors*

  $$\left\{w\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix},w\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}\right\}$$

  est une base de F_2 *(appelée une base de Christoffel).*

  Cette base est un relèvement de $\left\{\binom{p}{q},\binom{r}{s}\right\}$ *à* F_2

- *Tout conjugué d'une base de Christoffel est une base de* F_2 *et*
  toute base de F_2 *est conjuguée à une (unique) base de Christoffel*

III. SUBSTITUTIONS PRÉSERVANT LES MOTS DE CHRISTOFFEL

Mots de Christoffel positifs et conjugués

- Un mot de Christoffel positif est un mot en a et b de la forme

$$w\binom{p}{q}$$

où $p, q \in \mathbb{N}$

- Un conjugué d'un mot w est un mot w' tel que

$$w = uv \quad \text{et} \quad w' = vu$$

où u et v sont des mots

(Dans un groupe on aurait $w' = vwv^{-1}$)

Morphismes sturmiens

- Une substitution est une transformation qui remplace a et b par des mots (positifs) en a et b

  On peut composer les substitutions

- Un morphisme sturmien est une substitution transformant tout mot de Christoffel positif en le conjugué d'un mot de Christoffel positif

- Les morphismes sturmiens forment un monoïde St par composition des substitutions. C'est le monoïde sturmien

Morphismes sturmiens

- Une substitution est une transformation qui remplace *a* et *b* par des mots (positifs) en *a* et *b*

  On peut composer les substitutions

- Un morphisme sturmien est une substitution transformant tout mot de Christoffel positif en le conjugué d'un mot de Christoffel positif

- Les morphismes sturmiens forment un monoïde St par composition des substitutions. C'est le monoïde sturmien

Morphismes sturmiens

- Une substitution est une transformation qui remplace *a* et *b* par des mots (positifs) en *a* et *b*

  On peut composer les substitutions

- Un morphisme sturmien est une substitution transformant tout mot de Christoffel positif en le conjugué d'un mot de Christoffel positif

- Les morphismes sturmiens forment un monoïde St par composition des substitutions. C'est le monoïde sturmien

Exemples de morphismes sturmiens

- $$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} a \mapsto b \\ b \mapsto a \end{pmatrix}$$

On a $E^2 = \mathrm{id}$

- $$L_a = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto ab \end{pmatrix} \text{ et } R_a = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto ba \end{pmatrix}$$

- $$L_b = EL_aE = \begin{pmatrix} a \mapsto ba \\ b \mapsto b \end{pmatrix} \text{ et } R_b = ER_aE = \begin{pmatrix} a \mapsto ab \\ b \mapsto b \end{pmatrix}$$

Le monoïde sturmien comme sous-monoïde de $\mathrm{Aut}(F_2)$

- Mignosi & Séébold (1993) :
  Le monoïde St est engendré par $\{E, L_a, R_a\}$ ou par $\{E, L_b, R_b\}$

- Considérés comme endomorphismes de F_2, les générateurs de St sont inversibles

  En effet, $E^{-1} = E$,

$$L_a^{-1} = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto a^{-1}b \end{pmatrix} \text{ et } R_a^{-1} = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto ba^{-1} \end{pmatrix}$$

- Par conséquent, $\mathrm{St} \subset \mathrm{Aut}(F_2)$

Le monoïde sturmien comme sous-monoïde de $\mathrm{Aut}(F_2)$

- Mignosi & Séébold (1993) :
  Le monoïde St est engendré par $\{E, L_a, R_a\}$ ou par $\{E, L_b, R_b\}$

- Considérés comme endomorphismes de F_2, les générateurs de St sont inversibles

  En effet, $E^{-1} = E$,

$$L_a^{-1} = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto a^{-1}b \end{pmatrix} \text{ et } R_a^{-1} = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto ba^{-1} \end{pmatrix}$$

- Par conséquent, $\mathrm{St} \subset \mathrm{Aut}(F_2)$

Le monoïde sturmien comme sous-monoïde de $\mathrm{Aut}(F_2)$

- Mignosi & Séébold (1993) :
  Le monoïde St est engendré par $\{E, L_a, R_a\}$ ou par $\{E, L_b, R_b\}$

- Considérés comme endomorphismes de F_2, les générateurs de St sont inversibles

  En effet, $E^{-1} = E$,

$$L_a^{-1} = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto a^{-1}b \end{pmatrix} \text{ et } R_a^{-1} = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto ba^{-1} \end{pmatrix}$$

- Par conséquent, $\mathrm{St} \subset \mathrm{Aut}(F_2)$

Linéarisation d'un automorphisme de F_2

- Tout automorphisme de groupes

$$f : F_2 \to F_2$$

induit un automorphisme de groupes

$$\pi(f) : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$$

- La linéarisation $f \mapsto \pi(f)$ est un homomorphisme surjectif

$$\pi : \mathrm{Aut}(F_2) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2) = GL_2(\mathbb{Z})$$

Effet de la linéarisation sur les générateurs de St

$$\pi(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi(L_a) = \pi(R_a) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

$$\pi(L_b) = \pi(R_b) = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

Présentation de $SL_2(\mathbb{Z})$

- Générateurs : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Relations :
  - Relation de tresse : $AB^{-1}A = B^{-1}AB^{-1}$
  - Relation de torsion : $(AB^{-1}A)^4 = 1$
- Question : Soit $\pi : \mathrm{Aut}(F_2) \to GL_2(\mathbb{Z})$ la linéarisation.

  Peut-on remonter les deux relations ci-dessus à $Aut(F_2)$ en utilisant les relèvements L_a, R_a de A et les relèvements L_b, R_b de B ?

Présentation de $SL_2(\mathbb{Z})$

- **Générateurs :** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- **Relations :**
  - Relation de tresse : $AB^{-1}A = B^{-1}AB^{-1}$
  - Relation de torsion : $(AB^{-1}A)^4 = 1$
- Question : Soit π : Aut$(F_2) \to GL_2(\mathbb{Z})$ la linéarisation.

  Peut-on remonter les deux relations ci-dessus à $Aut(F_2)$ en utilisant les relèvements L_a, R_a de A et les relèvements L_b, R_b de B ?

Présentation de $SL_2(\mathbb{Z})$

- Générateurs : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Relations :
  - Relation de tresse : $AB^{-1}A = B^{-1}AB^{-1}$
  - Relation de torsion : $(AB^{-1}A)^4 = 1$
- Question : Soit $\pi : \mathrm{Aut}(F_2) \to GL_2(\mathbb{Z})$ la linéarisation.

  Peut-on remonter les deux relations ci-dessus à Aut(F_2) en utilisant les relèvements L_a, R_a de A et les relèvements L_b, R_b de B ?

Présentation de $SL_2(\mathbb{Z})$

- Générateurs : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Relations :
  - Relation de tresse : $AB^{-1}A = B^{-1}AB^{-1}$
  - Relation de torsion : $(AB^{-1}A)^4 = 1$
- Question : Soit $\pi : \mathrm{Aut}(F_2) \to GL_2(\mathbb{Z})$ la linéarisation.

  Peut-on remonter les deux relations ci-dessus à $Aut(F_2)$ en utilisant les relèvements L_a, R_a de A et les relèvements L_b, R_b de B ?

Présentation de $SL_2(\mathbb{Z})$

- Générateurs : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Relations :
  - Relation de tresse : $AB^{-1}A = B^{-1}AB^{-1}$
  - Relation de torsion : $(AB^{-1}A)^4 = 1$
- Question : Soit π : $\mathrm{Aut}(F_2) \to GL_2(\mathbb{Z})$ la linéarisation.

  Peut-on remonter les deux relations ci-dessus à $Aut(F_2)$ en utilisant les relèvements L_a, R_a de A et les relèvements L_b, R_b de B ?

Remontons les relations de $SL_2(\mathbb{Z})$ à $\mathrm{Aut}(F_2)$

- Relations de commutation :

$$L_a\,R_a = R_a\,L_a \quad \text{et} \quad L_b\,R_b = R_b L_b$$

- Relations de tresses :

$$L_a\,L_b^{-1}\,L_a = L_b^{-1}\,L_a\,L_b^{-1}\,, \quad L_a\,R_b^{-1}\,L_a = R_b^{-1}\,L_a\,R_b^{-1}\,,$$

$$R_a\,L_b^{-1}\,R_a = L_b^{-1}\,R_a\,L_b^{-1}\,, \quad R_a\,R_b^{-1}\,R_a = R_b^{-1}\,R_a\,R_b^{-1}\,.$$

- Relations de torsion :

$$(L_aL_b^{-1}R_a)^4 = (L_b^{-1}R_aR_b^{-1})^4 = 1\,,$$

$$(R_aR_b^{-1}L_a)^4 = (R_b^{-1}L_aL_b^{-1})^4 = 1\,,$$

(Point de départ du travail commun avec Reutenauer)

Remontons les relations de $SL_2(\mathbb{Z})$ à $\mathrm{Aut}(F_2)$

- Relations de commutation :

$$L_a\, R_a = R_a\, L_a \quad \text{et} \quad L_b\, R_b = R_b L_b$$

- Relations de tresses :

$$L_a\, L_b^{-1}\, L_a = L_b^{-1}\, L_a\, L_b^{-1}\,, \quad L_a\, R_b^{-1}\, L_a = R_b^{-1}\, L_a\, R_b^{-1}\,,$$

$$R_a\, L_b^{-1}\, R_a = L_b^{-1}\, R_a\, L_b^{-1}\,, \quad R_a\, R_b^{-1}\, R_a = R_b^{-1}\, R_a\, R_b^{-1}\,.$$

- Relations de torsion :

$$(L_a L_b^{-1} R_a)^4 = (L_b^{-1} R_a R_b^{-1})^4 = 1\,,$$

$$(R_a R_b^{-1} L_a)^4 = (R_b^{-1} L_a L_b^{-1})^4 = 1\,,$$

(Point de départ du travail commun avec Reutenauer)

Remontons les relations de $SL_2(\mathbb{Z})$ à $\mathrm{Aut}(F_2)$

- Relations de commutation :

$$L_a\,R_a = R_a\,L_a \quad \text{et} \quad L_b\,R_b = R_b L_b$$

- Relations de tresses :

$$L_a\,L_b^{-1}\,L_a = L_b^{-1}\,L_a\,L_b^{-1}\,, \quad L_a\,R_b^{-1}\,L_a = R_b^{-1}\,L_a\,R_b^{-1}\,,$$

$$R_a\,L_b^{-1}\,R_a = L_b^{-1}\,R_a\,L_b^{-1}\,, \quad R_a\,R_b^{-1}\,R_a = R_b^{-1}\,R_a\,R_b^{-1}\,.$$

- Relations de torsion :

$$(L_aL_b^{-1}R_a)^4 = (L_b^{-1}R_aR_b^{-1})^4 = 1\,,$$

$$(R_aR_b^{-1}L_a)^4 = (R_b^{-1}L_aL_b^{-1})^4 = 1\,,$$

(Point de départ du travail commun avec Reutenauer)

IV. LES TRESSES, ENFIN !

Le groupe de tresses B_n à n brins

Présentation de B_n :

Générateurs :

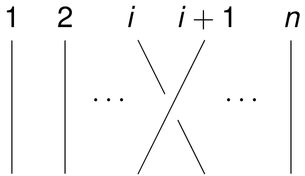
$$\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$$

Relations :

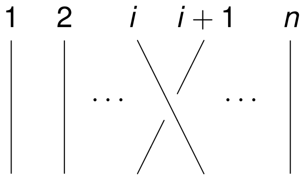
$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \qquad \text{si } |i-j| \geq 2$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

Générateurs de B_n



σ_i



σ_i^{-1}

Relation entre B_4 et $\mathrm{Aut}(F_2)$

- Homomorphisme de groupes $f : B_4 \to \mathrm{Aut}(F_2)$ défini par

$$f(\sigma_1) = L_a\,, \quad f(\sigma_2) = L_b^{-1}\,, \quad f(\sigma_3) = R_a\,.$$

- **Théorème.** *On a la suite exacte :*

$$1 \longrightarrow Z_4 \longrightarrow B_4 \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}(F_2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

  - Z_4 = centre de B_4, infini cyclique engendré par $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4$

Relation entre B_4 et $\mathrm{Aut}(F_2)$

- Homomorphisme de groupes $f : B_4 \to \mathrm{Aut}(F_2)$ défini par

$$f(\sigma_1) = L_a\,, \quad f(\sigma_2) = L_b^{-1}\,, \quad f(\sigma_3) = R_a\,.$$

- **Théorème.** *On a la suite exacte :*

$$1 \longrightarrow \; Z_4 \; \longrightarrow \; B_4 \; \xrightarrow{f} \; \mathrm{Aut}(F_2) \; \longrightarrow \; \mathbb{Z}/2 \; \longrightarrow 0$$

  • Z_4 = centre de B_4, infini cyclique engendré par $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4$

Le monoïde sturmien spécial St_0

- *Rappel :* Le monoïde St est engendré par E, L_a, R_a ou par E, L_b, R_b
- **Définition**

$$\mathrm{St}_0 = \{\varphi \in \mathrm{St} \mid \det(\varphi) = 1\} \subset \mathrm{Aut}(F_2)$$

- Les substitutions L_a, R_a, L_b, R_b appartiennent à St_0
- Le monoïde St_0 est engendré par L_a, R_a, L_b, R_b

Le monoïde sturmien spécial St_0

- *Rappel :* Le monoïde St est engendré par E, L_a, R_a ou par E, L_b, R_b
- **Définition**

$$\mathrm{St}_0 = \{\varphi \in \mathrm{St} \mid \det(\varphi) = 1\} \subset \mathrm{Aut}(F_2)$$

- Les substitutions L_a, R_a, L_b, R_b appartiennent à St_0
- Le monoïde St_0 est engendré par L_a, R_a, L_b, R_b

Le monoïde sturmien spécial St_0

- *Rappel :* Le monoïde St est engendré par E, L_a, R_a ou par E, L_b, R_b
- **Définition**

$$\mathrm{St}_0 = \{\varphi \in \mathrm{St} \mid \det(\varphi) = 1\} \subset \mathrm{Aut}(F_2)$$

- Les substitutions L_a, R_a, L_b, R_b appartiennent à St_0
- Le monoïde St_0 est engendré par L_a, R_a, L_b, R_b

Le monoïde sturmien spécial St_0

- *Rappel :* Le monoïde St est engendré par E, L_a, R_a ou par E, L_b, R_b
- **Définition**

$$\mathrm{St}_0 = \{\varphi \in \mathrm{St} \mid \det(\varphi) = 1\} \subset \mathrm{Aut}(F_2)$$

- Les substitutions L_a, R_a, L_b, R_b appartiennent à St_0
- Le monoïde St_0 est engendré par L_a, R_a, L_b, R_b

Présentation du monoïde St_0

Théorème. *Le monoïde St_0 a la présentation suivante :*

Générateurs : L_a, R_a, L_b, R_b

Relations : $L_a\, R_a = R_a\, L_a\,, \quad L_b\, R_b = R_b\, L_b\,,$
et

$$L_a\, L_b^k\, R_a = R_a\, R_b^k\, L_a\,, \quad L_b\, L_a^k\, R_b = R_b\, R_a^k\, L_b$$

pour tout $k \geq 1$.

(La présentation a une infinité de relations)

St_0 est un sous-monoïde de B_4

On peut relever $\mathrm{St}_0 \subset \mathrm{Aut}(F_2)$ en un sous-monoïde de B_4

- **Théorème.** *Il existe un morphisme de monoïdes $i : St_0 \to B_4$ tel que le composé*

$$\mathrm{St}_0 \xrightarrow{i} B_4 \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}(F_2)$$

  est l'inclusion.

- Le morphisme de monoïdes $i : \mathrm{St}_0 \to B_4$ est défini par

$$i(L_a) = \sigma_1\,, \quad i(L_b) = \sigma_2^{-1}\,, \quad i(R_a) = \sigma_3\,, \quad i(R_b) = \sigma_4^{-1}\,.$$

- Qu'est-ce que la tresse σ_4^{-1} ?

St_0 est un sous-monoïde de B_4

On peut relever $\mathrm{St}_0 \subset \mathrm{Aut}(F_2)$ en un sous-monoïde de B_4

- **Théorème.** *Il existe un morphisme de monoïdes $i : St_0 \to B_4$ tel que le composé*

$$\mathrm{St}_0 \xrightarrow{i} B_4 \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}(F_2)$$

  est l'inclusion.

- Le morphisme de monoïdes $i : \mathrm{St}_0 \to B_4$ est défini par

$$i(L_a) = \sigma_1\,, \quad i(L_b) = \sigma_2^{-1}\,, \quad i(R_a) = \sigma_3\,, \quad i(R_b) = \sigma_4^{-1}\,.$$

- Qu'est-ce que la tresse σ_4^{-1} ?

St_0 est un sous-monoïde de B_4

On peut relever $\mathrm{St}_0 \subset \mathrm{Aut}(F_2)$ en un sous-monoïde de B_4

- **Théorème.** *Il existe un morphisme de monoïdes $i : St_0 \to B_4$ tel que le composé*

$$\mathrm{St}_0 \xrightarrow{i} B_4 \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}(F_2)$$

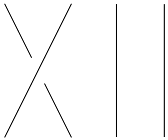
  est l'inclusion.

- Le morphisme de monoïdes $i : \mathrm{St}_0 \to B_4$ est défini par

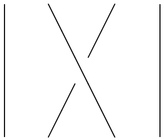
$$i(L_a) = \sigma_1\,, \quad i(L_b) = \sigma_2^{-1}\,, \quad i(R_a) = \sigma_3\,, \quad i(R_b) = \sigma_4^{-1}\,.$$

- Qu'est-ce que la tresse σ_4^{-1} ?

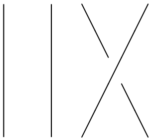
Les tresses σ_1, σ_2^{-1}, σ_3



σ_1



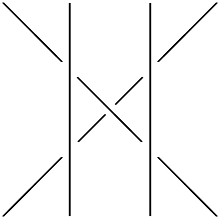
σ_2^{-1}



σ_3

La tresse σ_4^{-1}

Elle “tresse" les premier et quatrième brins (croisement négatif) derrière les deuxième et troisième brins



$$\sigma_4^{-1} = (\sigma_1 \sigma_3^{-1})\, \sigma_2\, (\sigma_1 \sigma_3^{-1})^{-1}$$

Conclusion :
Des mots aux tresses !

Le monoïde engendré par σ_1, σ_2^{-1}, σ_3, σ_4^{-1} dans B_4 est isomorphe au monoïde sturmien spécial St_0

$$\langle \sigma_1 , \sigma_2^{-1} , \sigma_3 , \sigma_4^{-1} \rangle^+ \cong \mathrm{St}_0$$

Références : Les Anciens et…

J. Bernoulli, *Sur une nouvelle espèce de calcul*. In : Recueil pour les astronomes, t. 1. Berlin (1772), 255–284

E. B. Christoffel, *Observatio arithmetica*. Ann. Mat. Pura Appl. 6 (1875), 148–152

A. Markoff, *Sur une question de Jean Bernouilli*. Math. Ann. 19 (1882), 27–36

H. J. S. Smith, *Note on continued fractions*. Messenger of Mathematics (1876)

Les Modernes

J.-P. Allouche, J. Shallit, *Automatic sequences. Theory, applications, generalizations*. Cambridge : Cambridge University Press 2003

C. Kassel, C. Reutenauer, *Sturmian morphisms, the braid group B_4, Christoffel words, and bases of F_2*. Ann. Mat. Pura Appl. 186 (2007), 317–339

M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*. Cambridge : Cambridge University Press, 2002

R. P. Osborne, H. Zieschang, *Primitives in the free group on two generators*. Invent. Math. 63 (1981), 17–24