Sobre palabras y trenzas

Christian Kassel

Institut de Recherche Mathématique Avancée
CNRS - Université Louis Pasteur
Strasbourg, Francia

Coloquio
Departamento de Matemáticas
Universidad de Chile - Santiago
30 de enero de 2008

¿De qué se trata ?

• De una historia de palabras (con dos letras)...

donde aparecen trenzas

• Se originó de un trabajo conjunto con
Christophe Reutenauer, UQAM, Montreal, Canadá

• Nuestro artículo fue publicado en
Annali di Matematica Pura ed Applicata 186 (2007), 317–339
arXiv : math.GR/0507219

I. HISTORIA

Elwin Bruno Christoffel (1829–1900)

- Famoso matemático alemán del siglo XIX, especialista en geometría, análisis tensorial (símbolos de Christoffel), teoría de invariantes, polinomios ortogonales, fracciones continuas, física (dispersión de la luz, ondas de choque)
- Profesor en Zurich, Berlín y Estrasburgo
- En 1872 Christoffel fundó el *Instituto matemático* de la Universidad de Estrasburgo

  (Después de la guerra franco-alemana de 1870, Alsacia y Lorena fueron anexadas al Imperio alemán)

Elwin Bruno Christoffel (1829–1900)

- Famoso matemático alemán del siglo XIX, especialista en geometría, análisis tensorial (símbolos de Christoffel), teoría de invariantes, polinomios ortogonales, fracciones continuas, física (dispersión de la luz, ondas de choque)
- Profesor en Zurich, Berlín y Estrasburgo
- En 1872 Christoffel fundó el *Instituto matemático* de la Universidad de Estrasburgo

  (Después de la guerra franco-alemana de 1870, Alsacia y Lorena fueron anexadas al Imperio alemán)

Elwin Bruno Christoffel (1829–1900)

- Famoso matemático alemán del siglo XIX, especialista en geometría, análisis tensorial (símbolos de Christoffel), teoría de invariantes, polinomios ortogonales, fracciones continuas, física (dispersión de la luz, ondas de choque)
- Profesor en Zurich, Berlín y Estrasburgo
- En 1872 Christoffel fundó el *Instituto matemático* de la Universidad de Estrasburgo

  (Después de la guerra franco-alemana de 1870, Alsacia y Lorena fueron anexadas al Imperio alemán)

Elwin Bruno Christoffel (1829–1900)

- Famoso matemático alemán del siglo XIX, especialista en geometría, análisis tensorial (símbolos de Christoffel), teoría de invariantes, polinomios ortogonales, fracciones continuas, física (dispersión de la luz, ondas de choque)
- Profesor en Zurich, Berlín y Estrasburgo
- En 1872 Christoffel fundó el *Instituto matemático* de la Universidad de Estrasburgo

  (Después de la guerra franco-alemana de 1870, Alsacia y Lorena fueron anexadas al Imperio alemán)

La *Observatio arithmetica* de Christoffel

- *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 6 (1875), 148–152
- Christoffel escribió este artículo en latín (él publicó también artículos en alemán, francés y italiano)
- Nombre del autor en la primera página del artículo : auctore E. B. Christoffel, prof. Argentinensi
- *Argentinensi* es derivado de *Argentoratum*, nombre dado por los Romanos a Estrasburgo cuando fundaron la ciudad

La *Observatio arithmetica* de Christoffel

- *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 6 (1875), 148–152
- Christoffel escribió este artículo en latín (él publicó también artículos en alemán, francés y italiano)
- Nombre del autor en la primera página del artículo : auctore E. B. Christoffel, prof. Argentinensi
- *Argentinensi* es derivado de *Argentoratum*, nombre dado por los Romanos a Estrasburgo cuando fundaron la ciudad

La *Observatio arithmetica* de Christoffel

- *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 6 (1875), 148–152
- Christoffel escribió este artículo en latín (él publicó también artículos en alemán, francés y italiano)
- Nombre del autor en la primera página del artículo : auctore E. B. Christoffel, prof. Argentinensi
- *Argentinensi* es derivado de *Argentoratum*, nombre dado por los Romanos a Estrasburgo cuando fundaron la ciudad

La *Observatio arithmetica* de Christoffel

- *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 6 (1875), 148–152
- Christoffel escribió este artículo en latín (él publicó también artículos en alemán, francés y italiano)
- Nombre del autor en la primera página del artículo : auctore E. B. Christoffel, prof. Argentinensi
- *Argentinensi* es derivado de *Argentoratum*, nombre dado por los Romanos a Estrasburgo cuando fundaron la ciudad

La *Observatio arithmetica* de Christoffel

- *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 6 (1875), 148–152
- Christoffel escribió este artículo en latín (él publicó también artículos en alemán, francés y italiano)
- Nombre del autor en la primera página del artículo : auctore E. B. Christoffel, prof. Argentinensi
- *Argentinensi* es derivado de *Argentoratum*, nombre dado por los Romanos a Estrasburgo cuando fundaron la ciudad

La *Observatio arithmetica* de Christoffel

- *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 6 (1875), 148–152
- Christoffel escribió este artículo en latín (él publicó también artículos en alemán, francés y italiano)
- Nombre del autor en la primera página del artículo : auctore E. B. Christoffel, prof. Argentinensi
- *Argentinensi* es derivado de *Argentoratum*, nombre dado por los Romanos a Estrasburgo cuando fundaron la ciudad

La *Observatio arithmetica* de Christoffel

- *Observatio arithmetica*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 6 (1875), 148–152
- Christoffel escribió este artículo en latín (él publicó también artículos en alemán, francés y italiano)
- Nombre del autor en la primera página del artículo : auctore E. B. Christoffel, prof. Argentinensi
- *Argentinensi* es derivado de *Argentoratum*, nombre dado por los Romanos a Estrasburgo cuando fundaron la ciudad

Observatio arithmetica 1

- *Designantibus a, b numeros positivos integros et primos inter se, sint r_1, r_2, $r_3, \ldots$ residua minima non negativa numerorum a, 2a, 3a, $\ldots$ secundum modulum b,...*
- Designando por a, b números enteros positivos relativamente primos, sean r_1, r_2, $r_3, \ldots$ los restos de la división de a, $2a$, $3a, \ldots$ por $b, \ldots$
- *Agitur autem de quaestione, quando r_m crescat vel decrescat, si m unitate augitur...*
- Se trata de la pregunta de si r_m crece o decrece cuando m aumenta en una unidad...

Observatio arithmetica 1

- *Designantibus a, b numeros positivos integros et primos inter se, sint r_1, r_2, $r_3, \ldots$ residua minima non negativa numerorum a, 2a, 3a, $\ldots$ secundum modulum b,$\ldots$*
- Designando por a, b números enteros positivos relativamente primos, sean r_1, r_2, $r_3, \ldots$ los restos de la división de a, $2a$, $3a, \ldots$ por b,$\ldots$
- *Agitur autem de quaestione, quando r_m crescat vel decrescat, si m unitate augitur$\ldots$*
- Se trata de la pregunta de si r_m crece o decrece cuando m aumenta en una unidad$\ldots$

Observatio arithmetica 1

- *Designantibus a, b numeros positivos integros et primos inter se, sint* $r_1, r_2, r_3, \ldots$ *residua minima non negativa numerorum a,* $2a$, $3a, \ldots$ *secundum modulum b,...*
- Designando por a, b números enteros positivos relativamente primos, sean r_1, r_2, $r_3, \ldots$ los restos de la división de a, $2a$, $3a, \ldots$ por b,...
- *Agitur autem de quaestione, quando* r_m *crescat vel decrescat, si m unitate augitur...*
- Se trata de la pregunta de si r_m crece o decrece cuando m aumenta en una unidad...

Observatio arithmetica 1

- *Designantibus a, b numeros positivos integros et primos inter se, sint r_1, r_2, $r_3, \ldots$ residua minima non negativa numerorum a, 2a, 3a, $\ldots$ secundum modulum b,...*
- Designando por a, b números enteros positivos relativamente primos, sean r_1, r_2, $r_3, \ldots$ los restos de la división de a, $2a$, $3a, \ldots$ por b,...
- *Agitur autem de quaestione, quando r_m crescat vel decrescat, si m unitate augitur...*
- Se trata de la pregunta de si r_m crece o decrece cuando m aumenta en una unidad...

Observatio arithmetica 1

- *Designantibus a, b numeros positivos integros et primos inter se, sint $r_1, r_2, r_3, \ldots$ residua minima non negativa numerorum a, 2a, 3a, $\ldots$ secundum modulum b,...*
- Designando por a, b números enteros positivos relativamente primos, sean r_1, r_2, $r_3, \ldots$ los restos de la división de a, $2a$, $3a, \ldots$ por b,...
- *Agitur autem de quaestione, quando r_m crescat vel decrescat, si m unitate augitur...*
- Se trata de la pregunta de si r_m crece o decrece cuando m aumenta en una unidad...

Observatio arithmetica 1

- *Designantibus a, b numeros positivos integros et primos inter se, sint r_1, r_2, $r_3, \ldots$ residua minima non negativa numerorum a, 2a, 3a, $\ldots$ secundum modulum b,...*
- Designando por a, b números enteros positivos relativamente primos, sean r_1, r_2, $r_3, \ldots$ los restos de la división de a, $2a$, $3a, \ldots$ por b,...
- *Agitur autem de quaestione, quando r_m crescat vel decrescat, si m unitate augitur...*
- Se trata de la pregunta de si r_m crece o decrece cuando m aumenta en una unidad...

Observatio arithmetica 2

- *…notatur littera c vel d, prout r_m crescit vel decrescit. Hoc modo nova series nascitur, e duabus tantum literis c, d, sed certo quodam ordine composita…*
- …se nota la letra c o d según r_m crezca o decrezca. De esta manera nace una nueva serie, compuesta de las dos letras c, d en cierto orden…

Observatio arithmetica 2

- *…notatur littera c vel d, prout r_m crescit vel decrescit. Hoc modo nova series nascitur, e duabus tantum literis c, d, sed certo quodam ordine composita…*

- …se nota la letra c o d según r_m crezca o decrezca. De esta manera nace una nueva serie, compuesta de las dos letras c, d en cierto orden…

Observatio arithmetica 2

- *…notatur littera c vel d, prout r_m crescit vel decrescit. Hoc modo nova series nascitur, e duabus tantum literis c, d, sed certo quodam ordine composita…*
- …se nota la letra c o d según r_m crezca o decrezca. De esta manera nace una nueva serie, compuesta de las dos letras c, d en cierto orden…

Observatio arithmetica 3

- *Exemplum I. Sit* $a = 4$, $b = 11$, *erit series* $(r_.)$ *notis c, d ornata*

$$\begin{array}{lccccccccccc} r_. = & 4 & 8 & 1 & 5 & 9 & 2 & 6 & 10 & 3 & 7 & 0 \\ g_. = & c & d & c & c & d & c & c & d & c & d & c \end{array}$$

- Recuperamos los enteros a y b a partir de la serie $(g_.)$:
  - $\star$ el entero a es el número de letras d en $(g_.)$
  - $\star$ el entero b es la longitud de la serie $(g_.)$
- El resultado principal del artículo dice como recuperar el desarollo en fracción continua de a/b a partir de $(g_.)$

Observatio arithmetica 3

- *Exemplum I. Sit* $a = 4$, $b = 11$, *erit series* $(r_.)$ *notis c, d ornata*

$$\begin{array}{lccccccccccc} r_. = & 4 & 8 & 1 & 5 & 9 & 2 & 6 & 10 & 3 & 7 & 0 \\ g_. = & c & d & c & c & d & c & c & d & c & d & c \end{array}$$

- Recuperamos los enteros a y b a partir de la serie $(g_.)$:

  ⋆ el entero a es el número de letras d en $(g_.)$
  ⋆ el entero b es la longitud de la serie $(g_.)$

- El resultado principal del artículo dice como recuperar el desarollo en fracción continua de a/b a partir de $(g_.)$

Observatio arithmetica 3

- *Exemplum I. Sit* $a = 4$, $b = 11$, *erit series* $(r_.)$ *notis c, d ornata*

$$\begin{array}{ccccccccccccc} r_. = & 4 & 8 & 1 & 5 & 9 & 2 & 6 & 10 & 3 & 7 & 0 \\ g_. = & c & d & c & c & d & c & c & d & c & d & c \end{array}$$

- Recuperamos los enteros a y b a partir de la serie $(g_.)$:
  - $\star$ el entero a es el número de letras d en $(g_.)$
  - $\star$ el entero b es la longitud de la serie $(g_.)$
- El resultado principal del artículo dice como recuperar el desarollo en fracción continua de a/b a partir de $(g_.)$

Observatio arithmetica 4

Las series de letras c, d obtenidas de esta manera, por ejemplo

$$cdccdccdcdc\,,$$

son llamadas palabras de Christoffel

Vamos a dar una construcción geométrica de los palabras de Christoffel

Las palabras de Christoffel (y sus variantes infinitas) intervienen en

- matemática
  - ⋆ dinámica simbólica (Morse)
  - ⋆ fracciones continuas
- informática
  - ⋆ lenguajes formales
  - ⋆ algoritmos con palabras y combinatoria
  - ⋆ reconocimiento de formas
- física
  - ⋆ cristalografía
- biología

II. CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LAS PALABRAS DE CHRISTOFFEL

Vectores primitivos de $\mathbb{Z}^2$ y palabras de Christoffel

- $\binom{p}{q} \in \mathbb{Z}^2$ es primitivo si p y q son relativamente primos
- A un vector primitivo $\binom{p}{q}$
  asociaremos una palabra de Christoffel

  $$w = w\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

  compuesta con las letras a, a^{-1}, b, b^{-1} y tal que
  • el número “algebraico” de ocurrencias de a en w es igual a p, y
  • el número “algebraico” de ocurrencias de b en w es igual a q

Vectores primitivos de $\mathbb{Z}^2$ y palabras de Christoffel

- $\binom{p}{q} \in \mathbb{Z}^2$ es primitivo si p y q son relativamente primos
- A un vector primitivo $\binom{p}{q}$
  asociaremos una palabra de Christoffel

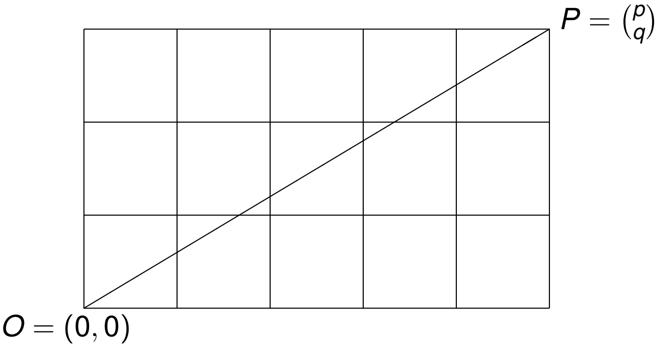
  $$w = w\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

  compuesta con las letras a, a^{-1}, b, b^{-1} y tal que

  • el número “algebraico” de ocurrencias de a en w es igual a p, y
  • el número “algebraico” de ocurrencias de b en w es igual a q

Representación planar de un vector primitivo

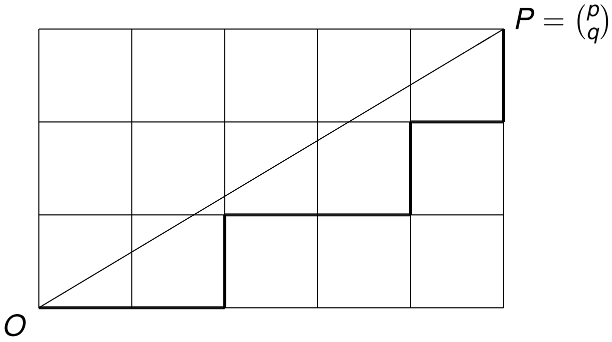
Si $P = \binom{p}{q}$ es primitivo, entonces $OP \bigcap \mathbb{Z}^2 = \{O, P\}$



Aproximación por "escaleras"

Si $p, q \geq 0$, se aproxima el segmento OP

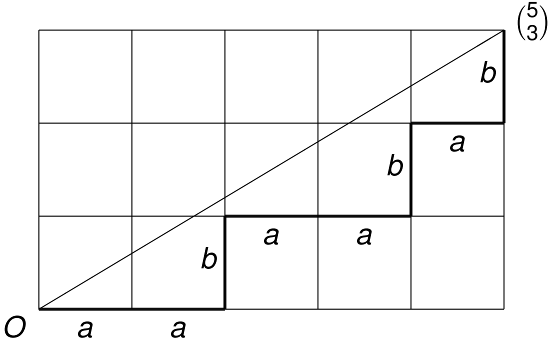
por la escalera inferior más próxima



Palabra de Christoffel asociada a un vector primitivo positivo

Al vector $\binom{5}{3} \in \mathbb{N}^2$ se asocia la palabra

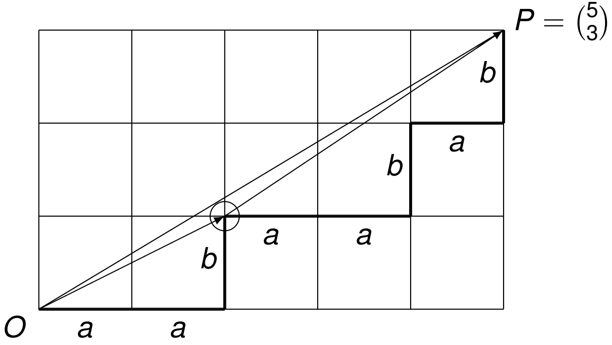
$$w\binom{5}{3} = aabaabab = a^2ba^2bab \in F_2$$



Factorización canónica de una palabra de Christoffel : un ejemplo

$\bigcirc$: el punto de $\mathbb{Z}^2$ más próximo de OP

$$w\binom{5}{3} = (a^2b)(a^2bab) = w\binom{2}{1}\, w\binom{3}{2}$$



Factorización canonica de una palabra de Christoffel : caso general

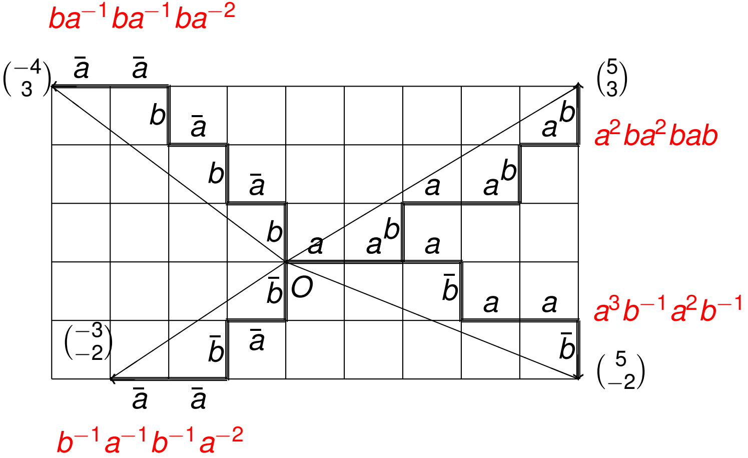
Teorema.
Si $\binom{p}{q}, \binom{r}{s} \in \mathbb{N}^2$ son primitivos y satisfacen $\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix} = 1$,
tenemos

$$w\binom{p+r}{q+s} = w\binom{p}{q}\, w\binom{r}{s}$$

Palabras de Christoffel generales

$\bar{a} = a^{-1}$

$\bar{b} = b^{-1}$



El grupo libre F_2

- Las palabras en a, a^{-1}, b, b^{-1} forman un grupo llamado el grupo libre F_2

  ⋆ *Ley de composición :* concatenación de las palabras
  ⋆ *Elemento neutro :* la palabra vacía
  ⋆ *Relaciones evidentes :*

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1 = bb^{-1} = b^{-1}b\,.$$

- Una palabra en a, a^{-1}, b, b^{-1} es reducida si no contiene las subpalabras

$$aa^{-1}, \quad a^{-1}a, \quad bb^{-1}, \quad b^{-1}b\,.$$

Cada elemento de F_2 puede representarse por una única palabra reducida

Contador de a y de b

- Hay un único homomorfismo de grupos

$$p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$$

tal que $p(a) = \binom{1}{0}$ y $p(b) = \binom{0}{1}$

Ejemplo :

$$p(a^{-3}b^5ab^{-2}a) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Por definición de las palabras de Christoffel,

$$p\left(w\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Objetivo : Describir las bases de F_2

- $\{u, v\} \subset F_2$ es una base de F_2 si $\{u, v\}$ engendra F_2 como grupo.

  Ejemplo trivial : $\{a, b\}$ es una base de F_2

- Dos bases $\{u, v\}$ y $\{u', v'\}$de F_2 son conjugadas si existe $w \in F_2$ tal que $u' = wuw^{-1}$ y $v' = wvw^{-1}$

- *Recuerdo : Descripción de las bases de* $\mathbb{Z}^2$

  $\{\binom{p}{q}, \binom{r}{s}\}$ es una base de $\mathbb{Z}^2 \iff ps - qr = \pm 1$

Objetivo : Describir las bases de F_2

- $\{u, v\} \subset F_2$ es una base de F_2 si $\{u, v\}$ engendra F_2 como grupo.

  Ejemplo trivial : $\{a, b\}$ es una base de F_2

- Dos bases $\{u, v\}$ y $\{u', v'\}$de F_2 son conjugadas si existe $w \in F_2$ tal que $u' = wuw^{-1}$ y $v' = wvw^{-1}$

- *Recuerdo : Descripción de las bases de $\mathbb{Z}^2$*

  $\{\binom{p}{q}, \binom{r}{s}\}$ es una base de $\mathbb{Z}^2 \iff ps - qr = \pm 1$

Objetivo : Describir las bases de F_2

- $\{u, v\} \subset F_2$ es una base de F_2 si $\{u, v\}$ engendra F_2 como grupo.

  Ejemplo trivial : $\{a, b\}$ es una base de F_2

- Dos bases $\{u, v\}$ y $\{u', v'\}$de F_2 son conjugadas si existe $w \in F_2$ tal que $u' = wuw^{-1}$ y $v' = wvw^{-1}$

- *Recuerdo : Descripción de las bases de* $\mathbb{Z}^2$

  $\{\binom{p}{q}, \binom{r}{s}\}$ es una base de $\mathbb{Z}^2 \iff ps - qr = \pm 1$

Levantamiento de bases de $\mathbb{Z}^2$ a F_2

- *Nuestro objetivo :* Describir las bases de F_2 y responder a la...
- *Pregunta :* Sea $p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ la suryección canónica.

  ¿ Se puede levantar cada base de $\mathbb{Z}^2$ en una base de F_2 *via p* ?
- *Ejemplo :*
  - $a^2b \in F_2$ es un levantamiento de $\binom{2}{1}$
  - a^3b^2 es un levantamiento de $\binom{3}{2}$
  - $\{a^2b, a^3b^2\}$ no es una base de F_2,
  - $\{a^2b, a^2bab\}$ es una base de F_2

Levantamiento de bases de $\mathbb{Z}^2$ a F_2

- *Nuestro objetivo :* Describir las bases de F_2 y responder a la...
- *Pregunta :* Sea $p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ la suryección canónica.

  ¿ Se puede levantar cada base de $\mathbb{Z}^2$ en una base de F_2 *via p* ?

- *Ejemplo :*
  - $a^2b \in F_2$ es un levantamiento de $\binom{2}{1}$
  - a^3b^2 es un levantamiento de $\binom{3}{2}$
  - $\{a^2b, a^3b^2\}$ no es una base de F_2,
  - $\{a^2b, a^2bab\}$ es una base de F_2

Levantamiento de bases de $\mathbb{Z}^2$ a F_2

- *Nuestro objetivo :* Describir las bases de F_2 y responder a la…
- *Pregunta :* Sea $p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ la suryección canónica.

  ¿ Se puede levantar cada base de $\mathbb{Z}^2$ en una base de F_2 *via* p ?
- *Ejemplo :*
  - $a^2b \in F_2$ es un levantamiento de $\binom{2}{1}$
  - a^3b^2 es un levantamiento de $\binom{3}{2}$
  - $\{a^2b, a^3b^2\}$ no es una base de F_2,
  - $\{a^2b, a^2bab\}$ es una base de F_2

Levantamiento de bases de $\mathbb{Z}^2$ a F_2

- *Nuestro objetivo :* Describir las bases de F_2 y responder a la...
- *Pregunta :* Sea $p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ la suryección canónica.

  ¿ Se puede levantar cada base de $\mathbb{Z}^2$ en una base de F_2 *via p* ?

- *Ejemplo :*
  - $a^2 b \in F_2$ es un levantamiento de $\binom{2}{1}$
  - $a^3 b^2$ es un levantamiento de $\binom{3}{2}$
  - $\{a^2 b, a^3 b^2\}$ no es una base de F_2,
  - $\{a^2 b, a^2 bab\}$ es una base de F_2

Levantamiento de bases de $\mathbb{Z}^2$ a F_2

- *Nuestro objetivo :* Describir las bases de F_2 y responder a la…
- *Pregunta :* Sea $p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ la suryección canónica.

  ¿ Se puede levantar cada base de $\mathbb{Z}^2$ en una base de F_2 *via p* ?

- *Ejemplo :*
  - $a^2b \in F_2$ es un levantamiento de $\binom{2}{1}$
  - a^3b^2 es un levantamiento de $\binom{3}{2}$
  - $\{a^2b, a^3b^2\}$ no es una base de F_2,
  - $\{a^2b, a^2bab\}$ es una base de F_2

Levantamiento de bases de $\mathbb{Z}^2$ a F_2

- *Nuestro objetivo :* Describir las bases de F_2 y responder a la…
- *Pregunta :* Sea $p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ la suryección canónica.

  ¿ Se puede levantar cada base de $\mathbb{Z}^2$ en una base de F_2 *via* p ?
- *Ejemplo :*
  - $a^2b \in F_2$ es un levantamiento de $\binom{2}{1}$
  - a^3b^2 es un levantamiento de $\binom{3}{2}$
  - $\{a^2b, a^3b^2\}$ no es una base de F_2,
  - $\{a^2b, a^2bab\}$ es una base de F_2

Levantamiento de bases de $\mathbb{Z}^2$ a F_2

- *Nuestro objetivo :* Describir las bases de F_2 y responder a la…
- *Pregunta :* Sea $p : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ la suryección canónica.

  ¿ Se puede levantar cada base de $\mathbb{Z}^2$ en una base de F_2 *via p* ?

- *Ejemplo :*
  - $a^2b \in F_2$ es un levantamiento de $\binom{2}{1}$
  - a^3b^2 es un levantamiento de $\binom{3}{2}$
  - $\{a^2b, a^3b^2\}$ no es una base de F_2,
  - $\{a^2b, a^2bab\}$ es una base de F_2

Descripción completa de las bases de F_2

Teorema.

- *Si* $\left\{ \binom{p}{q}, \binom{r}{s} \right\}$ *es una base de* $\mathbb{Z}^2$*, entonces*

$$\left\{ w\binom{p}{q}, w\binom{r}{s} \right\}$$

es una base de F_2 *(llamada una base de Christoffel).*

Esta base es un levantamiento de $\left\{ \binom{p}{q}, \binom{r}{s} \right\}$ *a* F_2

- *Cada base de* F_2 *es conjugada a una (única) base de Christoffel*

Descripción completa de las bases de F_2

Teorema.

- *Si* $\left\{\binom{p}{q}, \binom{r}{s}\right\}$ *es una base de* $\mathbb{Z}^2$*, entonces*

$$\left\{ w\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, w\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \right\}$$

  es una base de F_2 *(llamada una base de Christoffel).*

  Esta base es un levantamiento de $\left\{\binom{p}{q}, \binom{r}{s}\right\}$ *a* F_2

- *Cada base de* F_2 *es conjugada a una (única) base de Christoffel*

III. SUBSTITUCIONES QUE PRESERVAN LAS PALABRAS DE CHRISTOFFEL

Palabras de Christoffel positivas y conjugadas

• Una palabra de Christoffel positiva es una palabra en a y b que es de la forma

$$w\binom{p}{q}$$

donde p, q son enteros no negativos relativamente primos

• Dos palabras w, w' son conjugadas si hay palabras u, v tales que

$$w = uv \quad \text{y} \quad w' = vu$$

(En un grupo tendríamos $w' = vwv^{-1}$)

Morfismos de Christoffel

- Una substitución es una transformación que reemplaza a y b por palabras (positivas) en a y b

  Las substituciones se componen y forman un monoide

- Un morfismo de Christoffel es una substitución que transforma cada palabra de Christoffel positiva en una conjugada de alguna palabra de Christoffel

- Componiéndose, los morfismos de Christoffel forman un monoide M

Morfismos de Christoffel

- Una substitución es una transformación que reemplaza *a* y *b* por palabras (positivas) en *a* y *b*

  Las substituciones se componen y forman un monoide

- Un morfismo de Christoffel es una substitución que transforma cada palabra de Christoffel positiva en una conjugada de alguna palabra de Christoffel

- Componiéndose, los morfismos de Christoffel forman un monoide M

Morfismos de Christoffel

- Una substitución es una transformación que reemplaza a y b por palabras (positivas) en a y b

  Las substituciones se componen y forman un monoide

- Un morfismo de Christoffel es una substitución que transforma cada palabra de Christoffel positiva en una conjugada de alguna palabra de Christoffel

- Componiéndose, los morfismos de Christoffel forman un monoide M

Ejemplos de morfismos de Christoffel

- $$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{pmatrix} a \mapsto b \\ b \mapsto a \end{pmatrix}$$

Tenemos $E^2 = \mathrm{id}$

- $$L_a = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto ab \end{pmatrix} \text{ y } R_a = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto ba \end{pmatrix}$$

- $$L_b = EL_aE = \begin{pmatrix} a \mapsto ba \\ b \mapsto b \end{pmatrix} \text{ y } R_b = ER_aE = \begin{pmatrix} a \mapsto ab \\ b \mapsto b \end{pmatrix}$$

El monoide M como submonoide de Aut(F_2)

- Mignosi & Séébold (1993) :
  El monoide M esta engendrado por $\{E, L_a, R_a\}$ o por $\{E, L_b, R_b\}$

- Considerados como endomorfismos del grupo F_2, los generadores de M son inversibles

  Tenemos $E^{-1} = E$,

  $$L_a^{-1} = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto a^{-1}b \end{pmatrix} \text{ y } R_a^{-1} = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto ba^{-1} \end{pmatrix}$$

- Entonces, $\mathrm{M} \subset \mathrm{Aut}(F_2)$

El monoide M como submonoide de Aut(F_2)

- Mignosi & Séébold (1993) :
  El monoide M esta engendrado por $\{E, L_a, R_a\}$ o por $\{E, L_b, R_b\}$

- Considerados como endomorfismos del grupo F_2, los generadores de M son inversibles

  Tenemos $E^{-1} = E$,

$$L_a^{-1} = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto a^{-1}b \end{pmatrix} \text{ y } R_a^{-1} = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto ba^{-1} \end{pmatrix}$$

- Entonces, $\mathrm{M} \subset \mathrm{Aut}(F_2)$

El monoide M como submonoide de Aut(F_2)

- Mignosi & Séébold (1993) :
  El monoide M esta engendrado por $\{E, L_a, R_a\}$ o por $\{E, L_b, R_b\}$

- Considerados como endomorfismos del grupo F_2, los generadores de M son inversibles

  Tenemos $E^{-1} = E$,

  $$L_a^{-1} = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto a^{-1}b \end{pmatrix} \text{ y } R_a^{-1} = \begin{pmatrix} a \mapsto a \\ b \mapsto ba^{-1} \end{pmatrix}$$

- Entonces, M $\subset$ Aut(F_2)

Linealización de un automorfismo de F_2

- Cada automorfismo de grupos

$$f : F_2 \to F_2$$

induce un automorfismo de grupos

$$\pi(f) : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$$

- La linealización $f \mapsto \pi(f)$ es un homomorfismo suryectivo

$$\pi : \mathrm{Aut}(F_2) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2) = GL_2(\mathbb{Z})$$

Effecto de la linealización sobre los generadores de M

$$\pi(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi(L_a) = \pi(R_a) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

$$\pi(L_b) = \pi(R_b) = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

Presentación de $SL_2(\mathbb{Z})$

- Generadores : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Relaciones :
  - Relación de Coxeter o de trenza :

$$AB^{-1}A = B^{-1}AB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  - Relación de torsión : $(AB^{-1}A)^4 = 1$
- Pregunta : Sea $\pi : \mathrm{Aut}(F_2) \to GL_2(\mathbb{Z})$ la linealización.

  ¿ Se pueden levantar las dos relaciones precedentes a $\mathrm{Aut}(F_2)$ *utilisando los levantamientos L_a, R_a de A y los levantamientos L_b, R_b de B ?*

Presentación de $SL_2(\mathbb{Z})$

- Generadores : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Relaciones :
  - Relación de Coxeter o de trenza :

$$AB^{-1}A = B^{-1}AB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  - Relación de torsión : $(AB^{-1}A)^4 = 1$

- Pregunta : Sea $\pi : \mathrm{Aut}(F_2) \to GL_2(\mathbb{Z})$ la linealización.

  ¿ Se pueden levantar las dos relaciones precedentes a $\mathrm{Aut}(F_2)$ *utilisando los levantamientos* L_a, R_a *de* A *y los levantamientos* L_b, R_b *de* B *?*

Presentación de $SL_2(\mathbb{Z})$

- Generadores : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Relaciones :
  - Relación de Coxeter o de trenza :

$$AB^{-1}A = B^{-1}AB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  - Relación de torsión : $(AB^{-1}A)^4 = 1$
- Pregunta : Sea $\pi : \mathrm{Aut}(F_2) \to GL_2(\mathbb{Z})$ la linealización.

  ¿ Se pueden levantar las dos relaciones precedentes a $\mathrm{Aut}(F_2)$ *utilisando los levantamientos* L_a, R_a *de* A *y los levantamientos* L_b, R_b *de* B *?*

Presentación de $SL_2(\mathbb{Z})$

- Generadores : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Relaciones :
  - Relación de Coxeter o de trenza :

$$AB^{-1}A = B^{-1}AB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  - Relación de torsión : $(AB^{-1}A)^4 = 1$
- Pregunta : Sea $\pi : \mathrm{Aut}(F_2) \to GL_2(\mathbb{Z})$ la linealización.

  ¿ Se pueden levantar las dos relaciones precedentes a $\mathrm{Aut}(F_2)$ *utilisando los levantamientos* L_a, R_a *de* A *y los levantamientos* L_b, R_b *de* B *?*

Presentación de $SL_2(\mathbb{Z})$

- Generadores : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Relaciones :
  - Relación de Coxeter o de trenza :

$$AB^{-1}A = B^{-1}AB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  - Relación de torsión : $(AB^{-1}A)^4 = 1$

- Pregunta : Sea $\pi : \mathrm{Aut}(F_2) \to GL_2(\mathbb{Z})$ la linealización.

  ¿ Se pueden levantar las dos relaciones precedentes a $\mathrm{Aut}(F_2)$ *utilisando los levantamientos L_a, R_a de A y los levantamientos L_b, R_b de B ?*

Levantemos las relaciones de $SL_2(\mathbb{Z})$ a $\mathrm{Aut}(F_2)$

- Relaciones de conmutación :

$$L_a R_a = R_a L_a \quad \text{y} \quad L_b R_b = R_b L_b$$

- Relaciones de trenzas :

$$L_a L_b^{-1} L_a = L_b^{-1} L_a L_b^{-1}, \quad L_a R_b^{-1} L_a = R_b^{-1} L_a R_b^{-1},$$

$$R_a L_b^{-1} R_a = L_b^{-1} R_a L_b^{-1}, \quad R_a R_b^{-1} R_a = R_b^{-1} R_a R_b^{-1}.$$

- Relaciones de torsión :

$$(L_a L_b^{-1} R_a)^4 = (L_b^{-1} R_a R_b^{-1})^4 = 1,$$

$$(R_a R_b^{-1} L_a)^4 = (R_b^{-1} L_a L_b^{-1})^4 = 1.$$

(Fue el punto de partida del trabajo con Reutenauer)

Levantemos las relaciones de $SL_2(\mathbb{Z})$ a $\mathrm{Aut}(F_2)$

- Relaciones de conmutación :

$$L_a R_a = R_a L_a \quad \text{y} \quad L_b R_b = R_b L_b$$

- Relaciones de trenzas :

$$L_a L_b^{-1} L_a = L_b^{-1} L_a L_b^{-1}, \quad L_a R_b^{-1} L_a = R_b^{-1} L_a R_b^{-1},$$

$$R_a L_b^{-1} R_a = L_b^{-1} R_a L_b^{-1}, \quad R_a R_b^{-1} R_a = R_b^{-1} R_a R_b^{-1}.$$

- Relaciones de torsión :

$$(L_a L_b^{-1} R_a)^4 = (L_b^{-1} R_a R_b^{-1})^4 = 1,$$

$$(R_a R_b^{-1} L_a)^4 = (R_b^{-1} L_a L_b^{-1})^4 = 1.$$

(Fue el punto de partida del trabajo con Reutenauer)

Levantemos las relaciones de $SL_2(\mathbb{Z})$ a $\mathrm{Aut}(F_2)$

- Relaciones de conmutación :

$$L_a\, R_a = R_a\, L_a \quad \text{y} \quad L_b\, R_b = R_b L_b$$

- Relaciones de trenzas :

$$L_a\, L_b^{-1}\, L_a = L_b^{-1}\, L_a\, L_b^{-1}\,, \quad L_a\, R_b^{-1}\, L_a = R_b^{-1}\, L_a\, R_b^{-1}\,,$$

$$R_a\, L_b^{-1}\, R_a = L_b^{-1}\, R_a\, L_b^{-1}\,, \quad R_a\, R_b^{-1}\, R_a = R_b^{-1}\, R_a\, R_b^{-1}\,.$$

- Relaciones de torsión :

$$(L_a L_b^{-1} R_a)^4 = (L_b^{-1} R_a R_b^{-1})^4 = 1\,,$$

$$(R_a R_b^{-1} L_a)^4 = (R_b^{-1} L_a L_b^{-1})^4 = 1\,.$$

(Fue el punto de partida del trabajo con Reutenauer)

IV. ¡ TRENZAS, EN FIN !

El grupo de trenzas B_n con n hebras

Presentación de B_n :

Generadores :

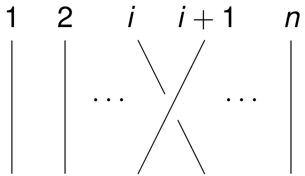
$$\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$$

Relaciones :

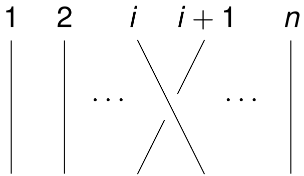
$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \qquad \text{si } |i-j| \geq 2$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

Representación geométrica de los generadores de B_n



σ_i



σ_i^{-1}

Relación entre B_4 y $\mathrm{Aut}(F_2)$

- Las fórmulas

$$f(\sigma_1) = L_a\,, \quad f(\sigma_2) = L_b^{-1}\,, \quad f(\sigma_3) = R_a$$

definen un homomorfismo de grupos $f : B_4 \to \mathrm{Aut}(F_2)$

- **Teorema.** *Tenemos la sucesión exacta siguiente :*

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow B_4 \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}(F_2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

• El núcleo Z es el centro de B_4 : es un grupo infinito cíclico engendrado por $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4$

Relación entre B_4 y $\mathrm{Aut}(F_2)$

- Las fórmulas

$$f(\sigma_1) = L_a\,, \quad f(\sigma_2) = L_b^{-1}\,, \quad f(\sigma_3) = R_a$$

definen un homomorfismo de grupos $f : B_4 \to \mathrm{Aut}(F_2)$

- **Teorema.** *Tenemos la sucesión exacta siguiente :*

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow B_4 \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}(F_2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

• El núcleo Z es el centro de B_4 : es un grupo infinito cíclico engendrado por $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4$

El monoide especial M_0

- *Recuerdo :* El monoide M está engendrado por E, L_a, R_a o por E, L_b, R_b
- **Definición**

$$\mathrm{M}_0 = \{\varphi \in \mathrm{M} \mid \det(\pi(\varphi)) = 1\} \subset \mathrm{Aut}(F_2)$$

- Las substituciones L_a, R_a, L_b, R_b pertenecen a M_0 (pero $E \notin \mathrm{M}_0$)
- **Lema.** *El monoide M_0 está engendrado por L_a, R_a, L_b, R_b.*

El monoide especial M_0

- *Recuerdo :* El monoide M está engendrado por E, L_a, R_a o por E, L_b, R_b
- **Definición**

$$\mathrm{M}_0 = \{\varphi \in \mathrm{M} \mid \det\big(\pi(\varphi)\big) = 1\} \subset \mathrm{Aut}(F_2)$$

- Las substituciones L_a, R_a, L_b, R_b pertenecen a M_0 (pero $E \notin \mathrm{M}_0$)
- **Lema.** *El monoide M_0 está engendrado por L_a, R_a, L_b, R_b.*

El monoide especial M_0

- *Recuerdo :* El monoide M está engendrado por E, L_a, R_a o por E, L_b, R_b
- **Definición**

$$\mathrm{M}_0 = \{\varphi \in \mathrm{M} \mid \det\big(\pi(\varphi)\big) = 1\} \subset \mathrm{Aut}(F_2)$$

- Las substituciones L_a, R_a, L_b, R_b pertenecen a M_0 (pero $E \notin \mathrm{M}_0$)
- **Lema**. *El monoide M_0 está engendrado por L_a, R_a, L_b, R_b.*

El monoide especial M_0

- *Recuerdo :* El monoide M está engendrado por E, L_a, R_a o por E, L_b, R_b
- **Definición**

$$\mathrm{M}_0 = \{\varphi \in \mathrm{M} \mid \det\big(\pi(\varphi)\big) = 1\} \subset \mathrm{Aut}(F_2)$$

- Las substituciones L_a, R_a, L_b, R_b pertenecen a M_0 (pero $E \notin \mathrm{M}_0$)
- **Lema.** *El monoide M_0 está engendrado por L_a, R_a, L_b, R_b.*

Presentación del monoide M_0

Teorema. *El monoide M_0 tiene la presentación siguiente :*

Generadores : L_a, R_a, L_b, R_b

Relaciones : $L_a\,R_a = R_a\,L_a\,, \quad L_b\,R_b = R_b\,L_b\,,$
y

$$L_a\,L_b^k\,R_a = R_a\,R_b^k\,L_a\,, \quad L_b\,L_a^k\,R_b = R_b\,R_a^k\,L_b$$

para todo $k \geq 1$.

(Esta presentación tiene una infinidad de relaciones)

M_0 es un submonoide de B_4

Milagro : Se levanta $\mathrm{M}_0 \subset \mathrm{Aut}(F_2)$ en un submonoide de B_4

- **Teorema.** *Existe un morfismo de monoides $i : M_0 \to B_4$ tal que el morfismo compuesto*

$$\mathrm{M}_0 \xrightarrow{i} B_4 \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}(F_2)$$

es la inclusión.

- El morfismo $i : \mathrm{M}_0 \to B_4$ se define por

$$i(L_a) = \sigma_1\,, \quad i(L_b) = \sigma_2^{-1}\,, \quad i(R_a) = \sigma_3\,, \quad i(R_b) = \sigma_4^{-1}\,.$$

- ¿ Cuál es la trenza σ_4^{-1} ?

M_0 es un submonoide de B_4

Milagro : Se levanta $\mathrm{M}_0 \subset \mathrm{Aut}(F_2)$ en un submonoide de B_4

- **Teorema.** *Existe un morfismo de monoides* $i : M_0 \to B_4$ *tal que el morfismo compuesto*

$$\mathrm{M}_0 \xrightarrow{i} B_4 \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}(F_2)$$

  es la inclusión.

- El morfismo $i : \mathrm{M}_0 \to B_4$ se define por

$$i(L_a) = \sigma_1 \,, \quad i(L_b) = \sigma_2^{-1} \,, \quad i(R_a) = \sigma_3 \,, \quad i(R_b) = \sigma_4^{-1} \,.$$

- ¿ Cuál es la trenza σ_4^{-1} ?

M_0 es un submonoide de B_4

Milagro : Se levanta $\mathrm{M}_0 \subset \mathrm{Aut}(F_2)$ en un submonoide de B_4

- **Teorema.** *Existe un morfismo de monoides $i : M_0 \to B_4$ tal que el morfismo compuesto*

$$\mathrm{M}_0 \xrightarrow{i} B_4 \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}(F_2)$$

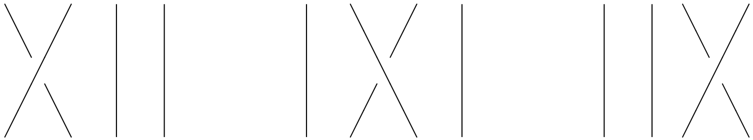
  es la inclusión.

- El morfismo $i : \mathrm{M}_0 \to B_4$ se define por

$$i(L_a) = \sigma_1 \,, \quad i(L_b) = \sigma_2^{-1} \,, \quad i(R_a) = \sigma_3 \,, \quad i(R_b) = \sigma_4^{-1} \,.$$

- ¿ Cuál es la trenza σ_4^{-1} ?

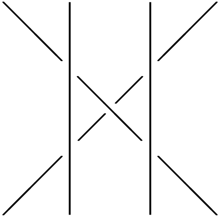
Las trenzas σ_1, σ_2^{-1}, σ_3



σ_1 σ_2^{-1} σ_3

La trenza σ_4^{-1}

Ella "cruza" la primera y la cuarta hebra (cruzamiento negativo) detrás de la segunda y de la tercera hebra



$$\sigma_4^{-1} = (\sigma_1 \sigma_3^{-1})\, \sigma_2\, (\sigma_1 \sigma_3^{-1})^{-1}$$

Conclusión :
¡ De las palabras a las trenzas !

El submonoide de B_4 engendrado por σ_1, σ_2^{-1}, σ_3, σ_4^{-1} es isomorfo al monoide M_0, cuyos elementos preservan las clases de conjugación de la palabras de Christoffel :

$$\langle\, \sigma_1 \,, \sigma_2^{-1} \,, \sigma_3 \,, \sigma_4^{-1} \,\rangle^{+} \;\cong\; \mathrm{M}_0$$

Bibliografía : Los Antiguos y...

J. Bernoulli, *Sur une nouvelle espèce de calcul*. In : Recueil pour les astronomes, t. 1. Berlin (1772), 255–284

E. B. Christoffel, *Observatio arithmetica*. Ann. Mat. Pura Appl. 6 (1875), 148–152

A. Markoff, *Sur une question de Jean Bernouilli*. Math. Ann. 19 (1882), 27–36

H. J. S. Smith, *Note on continued fractions*. Messenger of Mathematics (1876)

Los Modernos

J.-P. Allouche, J. Shallit, *Automatic sequences. Theory, applications, generalizations*. Cambridge : Cambridge University Press 2003

C. Kassel, C. Reutenauer, *Sturmian morphisms, the braid group B_4, Christoffel words, and bases of F_2*. Ann. Mat. Pura Appl. 186 (2007), 317–339

M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*. Cambridge : Cambridge University Press, 2002

R. P. Osborne, H. Zieschang, *Primitives in the free group on two generators*. Invent. Math. 63 (1981), 17–24

MUCHAS GRACIAS POR SU ATENCIÓN