Montpellier — 16 décembre 2004

LES VARIÉTÉS DE SCHUBERT ET LEURS LIEUX SINGULIERS

Christian Kassel

Institut de Recherche Mathématique Avancée
CNRS - Université Louis Pasteur
Strasbourg
http://www-irma.u-strasbg.fr/~kassel/

SCHUBERT
Herrmann Cäsar Hannibal
(1848–1911)

H. SCHUBERT, Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig 1879

Problèmes de géométrie énumérative :

- Combien de droites de $\mathbf{P}^3$ rencontrent 4 droites en position générale ? 2
- Combien de droites y a-t-il dans une surface cubique générique de $\mathbf{P}^3$? 27
- Combien de droites de $\mathbf{P}^4$ rencontrent 6 plans en position générale ? 5
- Combien de droites y a-t-il dans une hypersurface quintique générique de $\mathbf{P}^5$? 2875
- Combien de plans y a-t-il dans une hypersurface quartique générique de $\mathbf{P}^7$? 3 297 280

Le “calcul de Schubert” n’a été formalisé que 50 ans plus tard, par VAN DER WAERDEN (1933) et EHRESMANN (1934).

Variétés de base de la géométrie algébrique projective :

- Espaces projectifs
- Grassmanniennes
- Variétés de drapeaux
- Variétés de Schubert

bien comprises - littérature abondante

Des questions restées longtemps ouvertes :

Les variétés de Schubert sont-elles singulières ?

Si oui, lesquelles ?

Quel est leur lieu singulier ?

- Chevalley : "toutes les variétés de Schubert sont lisses"
- Premiers exemples de variétés de Schubert singulières en 1970
- Lieu singulier déterminé en 2001

DRAPEAUX

Les variétés de Schubert sont des "strates" dans les variétés de drapeaux.

On fixe un entier $n \geq 2$

Drapeau (complet) dans $\mathbf{C}^n$: suite de sous-espaces vectoriels emboîtés dans $\mathbf{C}^n$

$$V = \big(\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbf{C}^n\big)$$

avec $\dim V_i = i$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$.

Ensemble de tous les drapeaux : $\mathcal{F}_n$

Si on fixe un drapeau

$$U = \big(\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_{n-1} \subset U_n = \mathbf{C}^n\big),$$

on peut partitionner $\mathcal{F}_n$ en cellules affines

$$\mathcal{F}_n = \coprod_{\mu \in S_n} C_\mu$$

et calculer sa cohomologie (thèse d'Ehresmann, 1934)

LE CAS $n = 2$

$\mathcal{F}_2$ est la <u>droite projective</u>

$$\mathcal{F}_2 = \{0 \subset V_1 \subset \mathbf{C}^2\} = C_{(12)} \coprod C_{(21)}$$

$$C_{(12)} = \{\mathrm{U}\} \qquad \underline{\text{espace affine de dimension}}\ 0$$

$$C_{(21)} = \{V \in \mathcal{F}_2 \mid V \neq U\} \qquad \underline{\text{espace affine de dimension}}\ 1$$

CELLULE DE SCHUBERT
ASSOCIÉE À UNE PERMUTATION $\mu \in S_n$

Longueur de μ :

$$\begin{aligned}\ell(\mu) &= \text{nombre d'}\underline{\text{inversions}}\text{ de } \mu \\ &= \text{card } \Big\{(i,j) \in [1,2,\ldots,n]^2 \mid i < j \ \text{ et } \ \mu(i) > \mu(j)\Big\}.\end{aligned}$$

Tableau de rang de μ :

$$r_\mu(p,q) = \text{card } \Big\{ i \mid 1 \leq i \leq p \ \text{ et } \ \mu(i) \leq q \Big\}$$

Example : $\mu = (5,6,4,2,1,3) \in S_5$ de longueur 12

0	0	0	0	1
0	0	0	0	1
0	0	0	1	2
0	1	1	2	3
1	2	2	3	4

Cellule de Schubert C_μ :

$$C_\mu = \Big\{ V \in \mathcal{F}_n \mid \dim(V_p \cap U_q) = r_\mu(p,q) \ \ \forall p,q \Big\}.$$

C'est un <u>espace affine de dimension</u> $\ell(\mu)$

VARIÉTÉ DE SCHUBERT : Définition

Variété de Schubert X_μ :

$$X_\mu = \overline{C}_\mu = \left\{ V \in \mathcal{F}_n \mid \dim(V_p \cap U_q) \geq r_\mu(p,q) \;\; \forall\, p,q \right\}$$

C'est une <u>variété algébrique projective de dimension</u> $\ell(\mu)$

Ordre de Bruhat (d'Ehresmann ?) sur S_n:

$$X_\nu \subset X_\mu \Longleftrightarrow r_\mu(p,q) \leq r_\nu(p,q) \;\; \forall\, p,q$$

Si $X_\nu \subset X_\mu$, on pose $\nu \leq \mu$; c'est un <u>ordre partiel sur</u> S_n

Le cas $n = 3$:

$(3,2,1)$		$\ell = 3$
$(3,1,2)$	$(2,3,1)$	$\ell = 2$
$(2,1,3)$	$(1,3,2)$	$\ell = 1$
$(1,2,3)$		$\ell = 0$

SINGULARITÉS : Généralités

Soit X une variété algébrique projective définie localement par un système de polynômes

$$\begin{cases} f_1(X_1,\ldots,X_N)=0 \\ f_2(X_1,\ldots,X_N)=0 \\ \qquad\vdots \\ f_r(X_1,\ldots,X_N)=0 \end{cases}$$

Espace tangent en x :

$$\dim T_xX = N - \mathrm{rg}\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x)\right)_{i,j} \geq \dim X$$

Point régulier : $x \in X$ tel que $\dim T_xX = \dim X$

Point singulier : $x \in X$ tel que $\dim T_xX > \dim X$

Exemple : Pour la courbe $f(X_1,X_2)=X_1X_2=0$,

$$J(f) = (X_2\ X_1) \quad \text{et} \quad \dim T_xX = \begin{cases} 2 & \text{si } x=(0,0), \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le seul point singulier est $(0,0)$.

VARIÉTÉ DE SCHUBERT : Lieu singulier

C'est une union de sous-variétés de Schubert

$$\text{Sing } X_\mu = \bigcup_{\nu \in \text{Sg}(\mu)} X_\nu = \bigcup_{\nu \in \text{Max Sg}(\mu)} X_\nu$$

où Max Sg(μ) est le sous-ensemble des éléments maximaux de Sg(μ) pour l'ordre de Bruhat. Les sous-variétés X_ν où $\nu \in$ Max Sg(μ) sont les composantes irréductibles du lieu singulier.

Le problème à résoudre :

Etant donné μ, déterminer Max Sg(μ)

.

Lakshmibai-Seshadri (1984) : Si $x \in C_\nu \subset X_\mu$, alors

$$\dim T_x(X_\mu) = \text{card}\left\{(i,j), 1 \leq i < j \leq n \mid \nu\tau_{ij} \leq \mu\right\}$$

où τ_{ij} est la transposition (i,j).

Une solution au problème :

$$\nu \in \text{Sg}(\mu) \Longleftrightarrow \text{card}\left\{(i,j), 1 \leq i < j \leq n \mid \nu\tau_{ij} \leq \mu\right\} > \ell(\mu)$$

Est-ce une "bonne" solution ?

UN SOUS-PROBLÈME :
Quelles sont les variétés de Schubert singulières ?

X_μ est singulière si et seulement si id $\in \mathrm{Sg}(\mu)$

$$\Longleftrightarrow \text{card}\left\{(i,j), 1 \leq i < j \leq n \mid \tau_{ij} \leq \mu\right\} > \ell(\mu)$$

Le cas $n = 2$ **:** $X_{(21)}$ est lisse

Le cas $n = 3$ **:** les six variétés de Schubert sont lisses

	$(3,2,1)$		$\ell = 3$
$(3,1,2)$		$(2,3,1)$	$\ell = 2$
$(2,1,3)$		$(1,3,2)$	$\ell = 1$
	$(1,2,3)$		$\ell = 0$

Le cas $n = 4$ **:** $X_{(3412)}$ et $X_{(4231)}$ sont singulières ; les 22 autres sont lisses :

$$\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{24}, \tau_{34} < (3412) \quad \text{de longueur } 4$$

$$\tau_{12}, \tau_{13}, \underline{\tau_{14}}, \tau_{23}, \tau_{24}, \tau_{34} \leq (4231) \quad \text{de longueur } 5$$

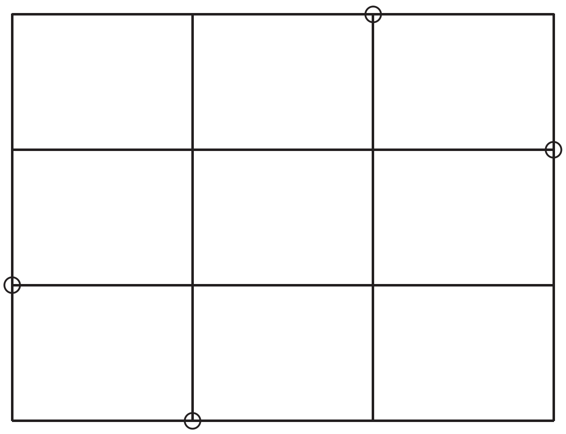
Quid pour n= 5, 6, ... ?

LE SOUS-PROBLÈME :
Quelles sont les variétés de Schubert singulières ?
(suite et fin)

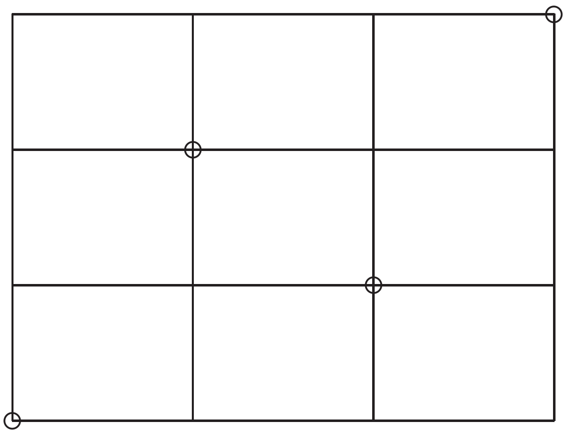
Une bonne solution !

Lakshmibai-Sandhya (1990) : X_μ est singulière si et seulement si μ "contient" la permutation (3412) ou la permutation (4231), c'est-à-dire s'il existe $i < j < k < \ell$ tels que

$$\mu(k) < \mu(\ell) < \mu(i) < \mu(j) \quad \text{ou} \quad \mu(\ell) < \mu(j) < \mu(k) < \mu(i).$$



Configuration de type **3412**



Configuration de type **4231**

RETOUR AU PROBLÈME PRINCIPAL :
Déterminer le lieu singulier d'une variété de Schubert

Rappel. Une solution au problème :

$$\nu \in \mathrm{Sg}(\mu) \Longleftrightarrow \operatorname{card}\left\{(i,j), 1 \leq i < j \leq n \mid \nu\tau_{ij} \leq \mu\right\} > \ell(\mu)$$

Pas très bonne !

Bonne solution : début 2001 indépendamment par

- **S. Billey, G. S. Warrington** (MIT)
- **C. Kassel, A. Lascoux, C. Reutenauer** (Strasbourg)
- **L. Manivel** (Grenoble)

UNE SOLUTION GRAPHIQUE

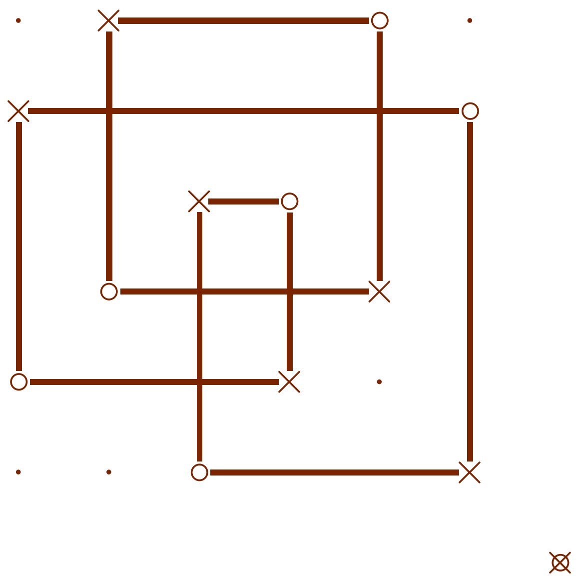
Représentation planaire d'un couple de permutations :

Objet consistant en
- **graphe de** μ (points représentés par $\circ$)
- **graphe de** ν (points représentés par $\times$)
- **circuits** composés de segments horizontaux et verticaux reliant les $\circ$ et les $\times$

$$\{\underline{\text{circuits}}\} \longleftrightarrow \{\underline{\text{cycles non triviaux}} \text{ de } \mu^{-1}\nu\}$$

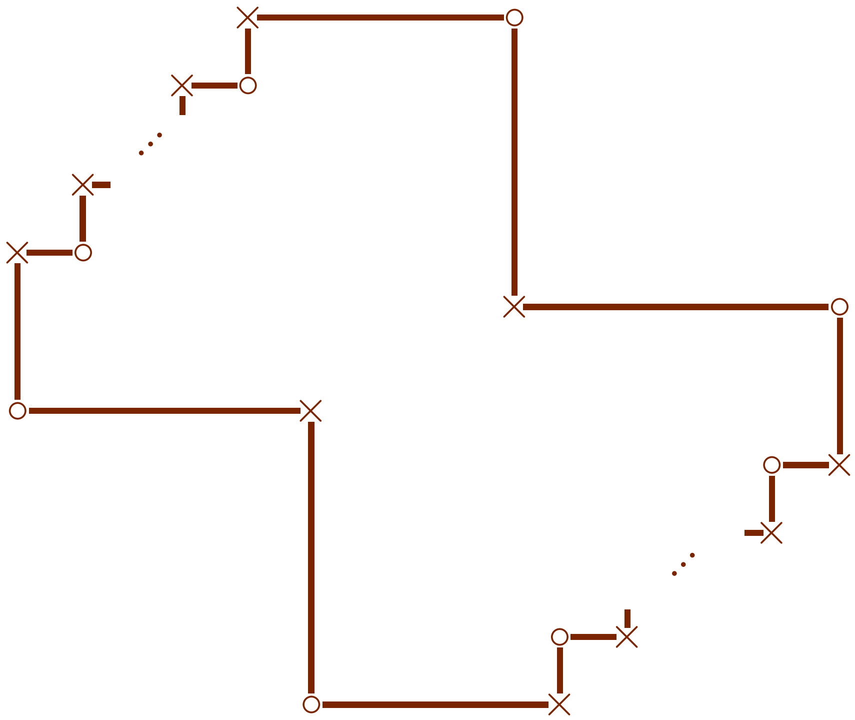
$$\{\underline{\text{points doubles}} \otimes\} \longleftrightarrow \{\underline{\text{points fixes}} \text{ de } \mu^{-1}\nu\}$$

Example : $\mu = (5, 6, 4, 2, 1, 3, 7)$ et $\nu = (2, 1, 3, 5, 4, 6, 7)$

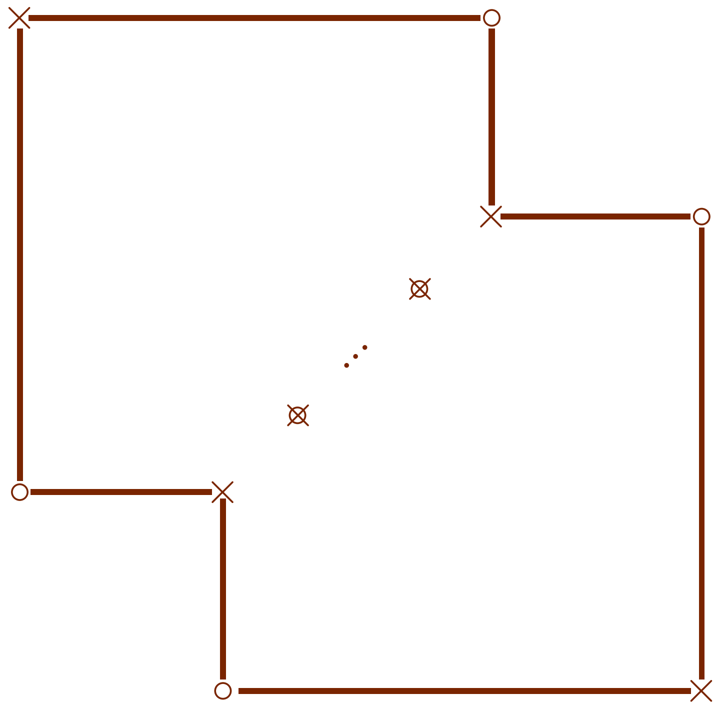


TROIS TYPES PARTICULIERS
À UN SEUL CIRCUIT
ET SANS POINT DOUBLE

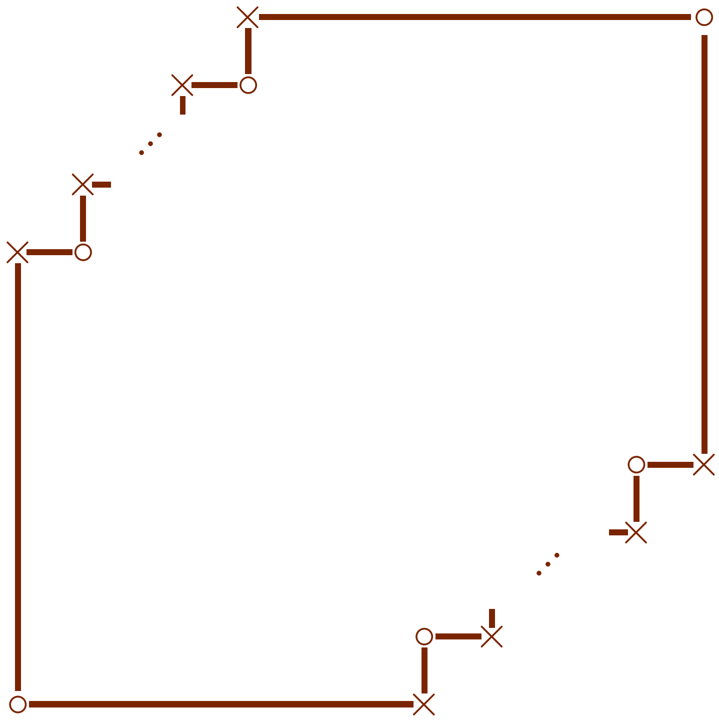
Le type $I(a,b)$ où $a \geq 1$ est le nombre de croix en haut à gauche et $b \geq 1$ est le nombre de croix en bas à droite (configuration de type 3412 dans μ);
Points doubles possibles uniquement à l'extérieur du circuit.



Le type $I(n)$ où $n \geq 1$ est le nombre de points doubles dans le rectangle central. Autres points doubles possibles à l'extérieur du circuit (configuration de type (3412) dans μ)



Le type *$II(a,b)$* où $a \geq 2$ est le nombre de croix en haut à gauche et $b \geq 2$ est le nombre de croix en bas à droite (configuration de type (4231) dans μ).
<u>Points doubles possibles uniquement à l'extérieur du circuit</u>.



SOLUTION GRAPHIQUE

Théorème (BW, KLR, M)
Etant donné $\mu \in S_n$, alors $\nu \in \text{Max Sg}(\mu)$ si et seulement si la représentation planaire du couple (ν, μ) est de type $I(a,b)$, $I(n)$ ou $II(a,b)$.

Corollaire. Si $\nu \in \text{Max Sg}(\mu)$, alors la permutation $\mu^{-1}\nu$ a un unique cycle non trivial.

Bonne solution

Application : $\mu = (3,6,4,5,1,2) \in S_6$

$$\dim X_\mu = \mathbf{10} \qquad \dim \mathcal{F}_6 = \mathbf{15}$$

$$\text{Sing} X_\mu = X_{\nu_1} \cup X_{\nu_2} \cup X_{\nu_3} \cup X_{\nu_4} \cup X_{\nu_5}$$

où

$$\begin{array}{llll} \nu_1 & = (1,6,3,5,2,4) & \text{de type} & I(1,1) \\ \nu_2 & = (1,6,4,3,2,5) & \text{de type} & I(1,1) \\ \nu_3 & = (3,4,1,6,5,2) & \text{de type} & II(2,2) \\ \nu_4 & = (3,4,2,6,1,5) & \text{de type} & II(2,2) \\ \nu_5 & = (3,6,1,4,2,5) & \text{de type} & I(1,1) \end{array}$$

Les cinq composantes irréductibles X_{ν_i} sont de dimension **7**

UNE IDÉE DE LA DÉMONSTRATION

Lakshmibai-Seshadri (1984) : Si $x \in C_\nu \subset X_\mu$, alors

$$\dim T_x(X_\mu) = \operatorname{card}\Big\{(i,j), 1 \leq i < j \leq n \mid \nu\tau_{ij} \leq \mu\Big\}$$

où τ_{ij} est la transposition (i,j).

Cas inintéressant :

$$\nu\tau_{ij} < \nu < \mu \Longleftrightarrow (i,j) \text{ est une } \underline{\text{inversion}} \text{ de } \nu$$
$$\big(i < j \ \text{ et } \ \nu(i) > \nu(j)\big)$$

Cas intéressant :

$$\nu < \nu\tau_{ij} \Longleftrightarrow (i,j) \text{ est une } \underline{\text{version}} \text{ de } \nu$$
$$\big(i < j \ \text{ et } \ \nu(i) < \nu(j)\big)$$

Version cliquable de ν : version (i,j) telle que $\nu\tau_{ij} \leq \mu$

Proposition. <u>Etant donné</u> $\nu < \mu$, <u>alors</u> $\nu \in \operatorname{Max} \operatorname{Sg}(\mu)$ <u>ssi</u>

(i) card{versions de ν non cliquables} $<$ card{versions de μ}

(ii) <u>et pour toute version</u> (i,j) <u>cliquable de</u> ν

card{versions de $\nu\tau_{ij}$ non cliquables} $=$ card{versions de μ}.

Exercice. Montrer que, si (ν,μ) est de l'un des types $I(a,b)$, $I(n)$, $II(a,b)$, alors $\nu \in \operatorname{Max} \operatorname{Sg}(\mu)$.

TABLEAU DE RANG RELATIF
ou la fonction Nord-Ouest

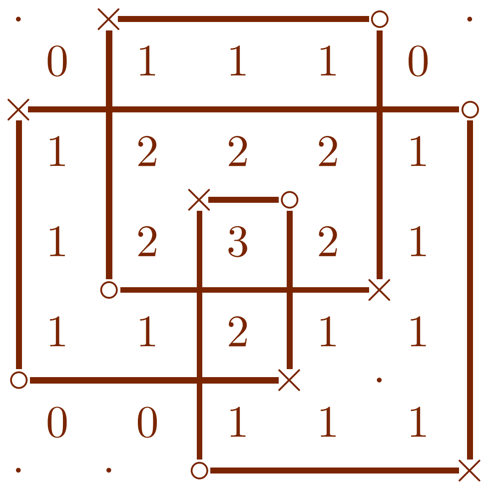
$$\mathrm{NW}_{\nu,\mu}(p,q) = r_\nu(p,q) - r_\mu(p,q)$$

- $\mu \geq \nu \iff \mathrm{NW}_{\nu,\mu}(p,q) \geq 0$ pour tout p, q

- La fonction NW ne change de valeurs que si on traverse un circuit de la représentation planaire de (ν, μ)

- Une version (i, j) de ν est cliquable si et seulement si les valeurs de NW sont ≥ 1 dans le "rectangle" de la version

Example : $\mu = (5, 6, 4, 2, 1, 3)$ et $\nu = (2, 1, 3, 5, 4, 6)$



Nombre de versions de μ : 3

Nombre de versions non cliquables de ν : 2

Nombre de versions non cliquables de $\nu\tau_{56}$: 2

PERMUTATIONS DE SAUT

Si $\nu \in \text{Max Sg}(\mu)$, alors pour toute version (i,j) cliquable de ν

$$\text{card}\{\text{versions de } \nu \text{ non cliqu.}\} < \text{card}\{\text{versions de } \nu\tau_{ij} \text{ non cliqu.}\}$$

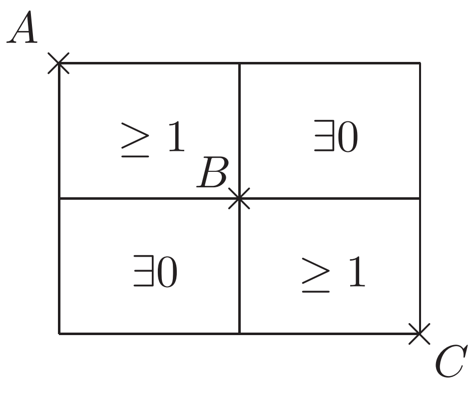
Définition : ν $(< \mu)$ est une permutation de saut pour μ s'il existe une version (i,j) cliquable de ν telle que

$$\text{card}\{\text{versions de } \nu \text{ non cliqu.}\} < \text{card}\{\text{versions de } \nu\tau_{ij} \text{ non cliqu.}\}$$

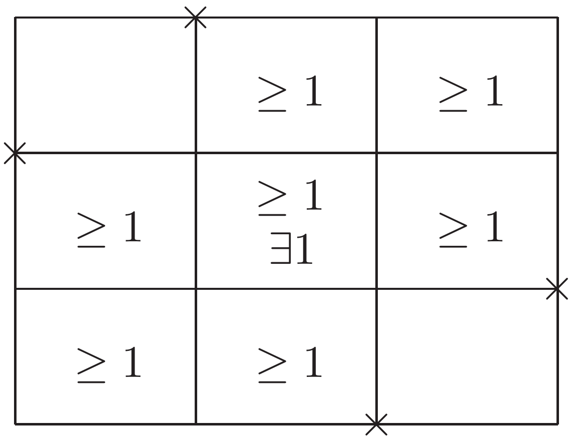
Proposition. ν est une permutation de saut pour μ ssi

(i) ν a deux versions cliquables disjointes dont les rectangles ont une intersection non vide contenant au moins une valeur égale à 1

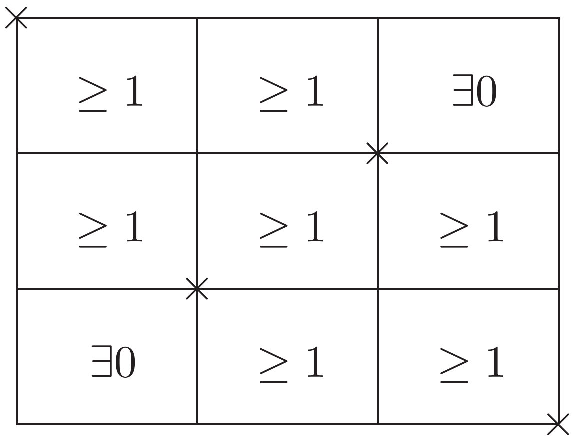
(ii) ou le diagrame de (ν, μ) est comme ci-dessous :



Proposition. Si $\nu \in \operatorname{Max} \operatorname{Sg}(\mu)$, alors ν a une configuration de type 2143 ou une configuration de type 1324.



Configuration de type **2143**



Configuration de type **1324**

POLYNÔMES DE KAZHDAN-LUSZTIG

$$P_{\nu,\mu}(q) = 0 \text{ si } \nu \not\leq \mu \qquad \deg(P_{\nu,\mu}) \leq \frac{\ell(\mu) - \ell(\nu) - 1}{2}$$

$$P_{\nu,\mu}(q) = \sum_{j \geq 0} \dim\Big(\mathcal{IH}^{2j}(X_\mu)_\nu\Big)\, q^j \in \mathbf{N}[q]$$

$P_{\nu,\mu}(q) = 1$ si et seulement si la variété de Schubert X_μ est non singulière en les points de C_ν

Théorème. Si $\nu \in \operatorname{Max} \operatorname{Sg}(\mu)$ et si la représentation planaire du couple (ν, μ) est

- de type $I(a, b)$, alors $P_{\nu,\mu}(q) = 1 + q$,
- de type $I(n)$, alors $P_{\nu,\mu}(q) = 1 + q^{n+1}$,
- de type $II(a, b)$, alors $P_{\nu,\mu}(q) = 1 + q + \cdots + q^{\min(a-1, b-1)}$.

Conclusion provisoire :

Si $\nu \notin \operatorname{Sg}(\mu)$, alors $P_{\nu,\mu}(q) = 1$

Si $\nu \in \operatorname{Max} \operatorname{Sg}(\mu)$, alors $P_{\nu,\mu}(q)$ donné par le théorème

Si $\nu \in \operatorname{Sg}(\mu) \setminus \operatorname{Max} \operatorname{Sg}(\mu)$, trouver une formule pour $P_{\nu,\mu}(q)$

A suivre !

RÉFÉRENCES

a) Détermination du lieu singulier :

• S. Billey, G. S. Warrington, Maximal singular loci of Schubert varieties in $SL(n)/B$, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), 3915–3945.

• C. Kassel, A. Lascoux, C. Reutenauer, The singular locus of a Schubert variety, J. Algebra 269 (2003), 74–108.

• L. Manivel, Le lieu singulier des variétés de Schubert, Intern. Math. Res. Notices 16 (2001), 849–871.

b) Description des singularités :

• A. Cortez, Singularités génériques et quasi-résolutions des variétés de Schubert pour le groupe linéaire, Advances Math. 178 (2003), 396–445.

• L. Manivel, Generic singularities of Schubert varieties, arXiv: math.AG/0105239.

c) Monographies :

• S. Billey, V. Lakshmibai, Singular loci of Schubert varieties, Progress in Mathematics, vol. 182, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2000.

• L. Manivel, Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence, Cours spécialisés n° 3, Soc. Math. France, Paris, 1998.

MERCI DE

VOTRE ATTENTION