Le multiplicateur de Schur de 1900 à nos jours

Christian Kassel

Institut de Recherche Mathématique Avancée
CNRS - Université de Strasbourg
Strasbourg, France

Colloquium, LAMFA, Amiens
1er octobre 2014

Introduction

Dans cet exposé je parlerai

- du multiplicateur introduit par Schur un peu après 1900,
- puis d'un avatar moderne dû à Drinfeld

Auparavant, je rappellerai ce qu'est le dual de Pontryagin d'un groupe abélien

Je présenterai ainsi trois objets mathématiques dus à trois mathématiciens ayant vécu à trois époques différentes

Issai Schur (1875–1941)

• professeur à l'Université de Berlin

• connu pour ses travaux en théorie des représentations ("lemme de Schur") et en combinatoire ("fonctions de Schur")

• chassé en 1935 de son poste de professeur en raison de ses origines juives, puis, suite à une intervention de Bieberbach, de l'Académie des sciences de Prusse et du comité éditorial de *Mathematische Zeitschrift*

• obligé de quitter l'Allemagne en 1939 et mort en exil à Jérusalem

Lev Semionovitch Pontriaguine (Pontryagin) (1908–1988)

• aveugle à l'âge de 14 ans suite à l'explosion d'un réchaud

• professeur à Moscou

• connu pour ses travaux en topologie algébrique et
en topologie différentielle ("classes de Pontryagin")

• et... pour ses positions antisémites

Vladimir Drinfeld (né en 1954)

• professeur à Chicago (auparavant, chercheur à Kharkov)

• connu pour ses travaux sur la conjecture de Langlands et en physique mathématique menant aux groupes quantiques

• médaille Fields en 1990

Dual de Pontryagin

Soit G un groupe abélien localement compact

• **Définition**. *Un caractère de G est une fonction continue $\chi : G \to \mathbb{U}$ à valeurs dans les nombres complexes de module* 1 *telle que*

$$\chi(a+b) = \chi(a)\,\chi(b) \qquad (a, b \in G)$$

• L'ensemble des caractères de G est appelé le dual de Pontryagin de G ; il forme un groupe dont la loi est donnée par

$$(\chi \cdot \chi')(a) = \chi(a)\,\chi'(a) \qquad (a \in G)$$

• La dualité de Pontryagin est involutive : $\widehat{\widehat{G}} \cong G$

• **Exemples**.
(a) $\widehat{\mathbb{U}} = \mathbb{Z}$: tout endomorphisme continu de $\mathbb{U}$ est de la forme $z \mapsto z^n$ $(n \in \mathbb{Z})$
(b) $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$: tout homorphisme continu $\mathbb{R} \to \mathbb{U}$ est de la forme $t \mapsto e^{iat}$ $(a \in \mathbb{R})$

• Le dual d'un groupe compact est un groupe discret et réciproquement

• Dans la suite on ne s'intéressera qu'aux groupes compacts et discrets, c'est-à-dire aux groupes finis

Transformation de Fourier discrète

• **Question**. Comment étendre la dualité de Pontryagin aux groupes (finis) non abéliens sachant que tout caractère $\chi : G \to \mathbb{U}$ se factorise par le quotient abélien maximal $G_{\mathrm{ab}} = G/[G, G]$?

• **Idée**. Passer aux algèbres de fonctions

• Soit G un groupe fini abélien et $O(G)$ l'algèbre des fonctions sur G à valeurs complexes. Notons $O(\widehat{G})$ l'algèbre des fonctions sur le dual de Pontryagin de G

La transformation de Fourier discrète (TFD)

$$\widehat{f}(\chi) = \sum_{a \in G} f(a)\,\overline{\chi(a)} \qquad (\chi \in \widehat{G})$$

définit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$f \mapsto \widehat{f} : O(G) \to O(\widehat{G})$$

L'algèbre d'un groupe

• La TDF n'est pas un isomorphisme d'algèbres : on a

$$\widehat{f_1} \cdot \widehat{f_2} = \widehat{f_1 * f_2}$$

où le produit $*$, dit produit de convolution, sur $O(G)$ est défini par

$$(f_1 * f_2)(a) = \sum_{b \in G} f_1(b)\, f_2(a - b) \qquad (a \in G)$$

• Le produit de convolution $*$ munit $O(G)$ d'une autre structure d'algèbre associative et unifère, notée $\mathbb{C}G$ et appelée l'algèbre du groupe G

Etant donné $a \in G$, soit e_a la fonction nulle partout sauf en a où elle vaut 1. Alors

$$e_a * e_b = e_{a+b} \qquad (a, b \in G)$$

Conclusion. La TDF permet d'identifier l'algèbre des fonctions $O(\widehat{G})$ sur le dual de Pontryagin $\widehat{G}$ avec l'algèbre du groupe $\mathbb{C}G$

Algèbres de Hopf

• Si G est un groupe (fini) non abélien, alors les algèbres $O(G)$ et $\mathbb{C}G$ sont bien définies, et en généralisant à partir du cas abélien, on peut considérer l'algèbre du groupe $\mathbb{C}G$ comme le dual de l'algèbre des fonctions $O(G)$

On va donner un sens précis à cette nouvelle dualité en utilisant le langage des algèbres de Hopf

• Une algèbre de Hopf est une algèbre associative et unifère muni de structures supplémentaires, notamment d'un morphisme d'algèbres

$$\Delta : H \to H \otimes H \qquad \text{(coproduit)}$$

vérifiant l'égalité de coassociativité

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}_H)\Delta = (\mathrm{id}_H \otimes \Delta)\Delta$$

• Le concept d'algèbre de Hopf est auto-dual : si H est une algèbre de Hopf de dimension finie, alors son dual linéaire $H^* = \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C})$ en est une également :

- le produit de H^* est la transposée du coproduit de H
- le coproduit de H^* est la transposée du produit de H

La dualité entre $O(G)$ et $\mathbb{C}G$

• Pour tout groupe (fini) G, l'algèbre des fonctions $O(G)$ est une algèbre de Hopf dont le coproduit est défini par

$$\Delta(f)(g,h) = f(gh) \qquad (g,h \in G)$$

• L'algèbre de groupe $\mathbb{C}G$ a également une structure d'algèbre de Hopf ; son coproduit est donné par

$$\Delta(e_g) = e_g \otimes e_g \qquad (g \in G)$$

• L'accouplement naturel $\langle -,- \rangle : \mathbb{C}G \times O(G) \to \mathbb{C}$ donné par

$$\langle e_g, f \rangle = f(g)$$

induit un isomorphisme d'algèbres de Hopf $\mathbb{C}G \xrightarrow{\cong} O(G)^*$

• **Moralité**. La dualité de Pontryagin pour les groupes non abéliens, c'est la dualité entre les algèbres de Hopf $O(G)$ et $\mathbb{C}G$

Représentations projectives

• Une représentation linéaire d'un groupe fini G est un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$$

de G vers le groupe linéaire général pour un certain entier $n \geq 1$

• Une représentation projective d'un groupe fini G est un homomorphisme de groupes

$$\bar{\rho} : G \to PGL_n(\mathbb{C})$$

de G vers le groupe linéaire projectif

$$PGL_n(\mathbb{C}) = GL_n(\mathbb{C}) / \{\lambda I_n\,,\ \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}$$

Les représentations projectives ont étudiées par Schur dans deux articles parus en 1904 et 1907 au Journal de Crelle (*Journal für reine und angewandte Mathematik*)

Cocycle associé à une représentation projective

- En associant à tout élément de $PGL_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible dans $GL_n(\mathbb{C})$, autrement dit, en choisissant une section de la surjection canonique $GL_n(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow PGL_n(\mathbb{C})$, on peut identifier une représentation projective $\bar{\rho} : G \to PGL_n(\mathbb{C})$ à une fonction

$$\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$$

telle que, pour tous $g, h \in G$, il existe un scalaire $\alpha(g, h) \neq 0$ tel que

$$\rho(gh) = \alpha(g, h)\, \rho(g)\rho(h) \qquad (g, h \in G)$$

- Que peut-on dire de la fonction $\alpha : G \times G \to \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$?

Si on développe l'égalité $\rho((gh)k) = \rho(g(hk))$, on obtient la relation de cocycle

$$\alpha(g, h)\, \alpha(gh, k) = \alpha(h, k)\, \alpha(g, hk) \qquad (g, h, k \in G) \tag{1}$$

• On dit qu'une fonction $\alpha : G \times G \to \mathbb{C}^\times$ vérifiant la relation (1) est un 2-cocycle de G

Cocycles cohomologues

• Si on fait le choix d'une autre section de la surjection $GL_n(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow PGL_n(\mathbb{C})$, on obtient un autre 2-cocycle β. Il est lié à α par une relation de la forme

$$\beta(g,h) = \frac{\lambda(g)\lambda(h)}{\lambda(gh)}\,\alpha(g,h) \qquad (g,h \in G)$$

où $\lambda : G \to \mathbb{C}^\times$ est une certaine fonction

On dit que les 2-cocycles α et β sont cohomologues

• La relation de cohomologie est une relation d'équivalence sur les 2-cocycles d'un groupe

Le multiplicateur de Schur - Définition

• **Définition**. *Le multiplicateur de Schur* $M(G)$ *de* G *est le groupe des classes de cohomologie de* 2*-cocycles de* G

• Depuis l'avènement de l'algèbre homologique et de la cohomologie des groupes (1940–50), on sait que le multiplicateur de Schur s'identifie au second groupe de cohomologie du groupe G :

$$M(G) = H^2(G, \mathbb{C}^\times)$$

ce qui donne de puissants moyens de le calculer

• **Remarque**. Si G est un groupe abélien fini, alors $\widehat{G} = H^1(G, \mathbb{C}^\times)$

On peut considérer le multiplicateur de Schur comme un analogue supérieur du dual de Pontryagin

Le multiplicateur de Schur - Exemples

- Schur (1911) a déterminé le multiplicateur de Schur des groupes symétriques et alternés :

$$M(S_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{si } n \geq 4 \\ 1 & \text{si } n \leq 3 \end{cases}$$

$$M(A_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{si } n \geq 8 \text{ et } n = 4,5 \\ \mathbb{Z}/6 & \text{si } n = 6,7 \\ 1 & \text{si } n \leq 3 \end{cases}$$

- Les multiplicateurs de Schur de tous les groupes simples ont été calculés dans les années 1960–70. Par exemple,

  (a) pour le Monstre de Fischer-Griess, on a $M(F_1) = 1$

  (b) $M(PSL_3(\mathbb{F}_4)) \cong \mathbb{Z}/12 \times \mathbb{Z}/4$

- Pour des groupes "composés" le multiplicateur peut être "grand" :

$$M((\mathbb{Z}/2)^N) \cong (\mathbb{Z}/2)^{N(N-1)/2}$$

Vers un “dual” du multiplicateur de Schur

Questions

• Peut-on définir le multiplicateur de Schur d'un groupe fini G en termes de l'algèbre des fonctions $O(G)$?

Comme nous l'avons vu, une telle réinterprétation permet de voir la dualité de Pontryagin des groupes dans le cadre plus général de la dualité des algèbres de Hopf

$$O(G) \longleftrightarrow \mathbb{C}G$$

• Plus généralement, peut-on définir le multiplicateur de Schur dans le cadre des algèbres de Hopf ?

• La réponse est oui ; elle fait intervenir les “twists de Drinfeld”

Twists de Drinfeld

Ils ont été introduits par Drinfeld en 1989–90 pour classifier les groupes quantiques qu'il avait définis quelques années auparavant

• **Définition**. *(a) Un twist de Drinfeld sur une algèbre de Hopf H est un élément inversible $F \in H \otimes H$ vérifiant l'équation*

$$(F \otimes 1)\,(\Delta \otimes \mathrm{id}_H)(F) = (1 \otimes F)\,(\mathrm{id}_H \otimes \Delta)(F) \in H \otimes H \otimes H \qquad (2)$$

• Si $H = O(G)$ est l'algèbre des fonctions complexes sur un groupe fini G, alors un twist de Drinfeld

$$F \in O(G) \otimes O(G) = O(G \times G)$$

n'est autre qu'une fonction $F : G \times G \to \mathbb{C}$ vérifiant deux conditions :

(a) F prend des valeurs dans $\mathbb{C}^\times \iff$ inversibilité de F

(b) F est un 2-cocycle de $G \iff$ équation (2)

Conclusion. Un twist de Drinfeld sur $H = O(G)$ est un 2-cocycle de G

Le multiplicateur de Schur exprimé à l'aide des twists de Drinfeld

- **Lemme**. *Deux 2-cocycles F, F' de G sont cohomologues si et seulement si*

$$F' = (\lambda \otimes \lambda)\, F\, \Delta(\lambda^{-1}) \in O(G) \otimes O(G) \tag{3}$$

où λ est un élément inversible de $O(G)$, c'est-à-dire une fonction $\lambda : G \to \mathbb{C}^\times$ à valeurs non nulles

Conséquences.

(a) Le multiplicateur de Schur $M(G)$ d'un groupe fini s'identifie à l'ensemble des classes de cohomologie des twists de Drinfeld sur l'algèbre de Hopf $O(G)$

(b) La relation d'équivalence (3) s'étend aux twists de Drinfeld sur les algèbres de Hopf

Le multiplicateur de Schur d'une algèbre de Hopf

• **Première tentative**. Définir le multiplicateur de Schur d'une algèbre de Hopf H comme l'ensemble des classes de cohomologie des twists de Drinfeld sur H

• **Un hic !** Le produit de twists de Drinfeld sur une algèbre de Hopf non commutative n'est en général pas un twist de Drinfeld

• **Deuxième tentative**. On se restreint aux twists de Drinfeld invariants, c'est-à-dire aux twists F tels que

$$\Delta(a)F = F\Delta(a) \qquad (a \in H)$$

• **Coup de chance**. Le produit de deux twists invariants est un twist invariant

• **Définition** (Peter Schauenburg, 2002). Le multiplicateur de Schur $\mathcal{M}(H)$ d'une algèbre de Hopf H est le groupe des classes de cohomologie des twists de Drinfeld invariants sur H

Le multiplicateur de Schur de l'algèbre d'un groupe

• On peut maintenant essayer de calculer le multiplicateur de Schur de diverses algèbres de Hopf

- Si $H = O(G)$ est l'algèbre des fonctions sur un groupe fini G, alors au vu des identifications précédentes, on retrouve le multiplicateur de Schur de G :

$$\mathcal{M}(O(G)) = M(G)$$

- Considérons maintenant l'algèbre duale de $O(G)$, à savoir l'algèbre $\mathbb{C}G$ du groupe G.

  Nous nous concentrons sur ce cas et posons

$$\mathcal{H}(G) = \mathcal{M}(\mathbb{C}G)$$

  • *Cas abélien.* Si G est abélien, alors $\mathbb{C}G \cong O(\widehat{G})$ via TFD et donc

$$\mathcal{H}(G) \cong \mathcal{M}(O(\widehat{G})) = M(\widehat{G})$$

Le groupe $\mathcal{H}(G)$

• Que peut-on dire de $\mathcal{H}(G) = \mathcal{M}(\mathbb{C}G)$ quand G est un groupe fini non abélien ?

• La réponse est donnée dans un travail en commun avec Pierre Guillot (Strasbourg)

Référence : P. Guillot, C. Kassel,
Cohomology of invariant Drinfeld twists on group algebras,
Internat. Math. Res. Notices 2010 no. 10, 1894–1939; arXiv:0903.2807

• Je vais me contenter d'énoncer trois propriétés de $\mathcal{H}(G)$ et de donner de quelques exemples de calcul

Propriétés et calcul de $\mathcal{H}(G)$

- **Trois propriétés importantes**

  1. $\mathcal{H}(G)$ est un groupe fini
  2. $\mathcal{H}(G)$ contient un sous-groupe $\mathcal{H}_0(G)$ isomorphe à un sous-groupe d'automorphismes extérieurs $\mathrm{Out}_c(G)$ (décrit plus loin)
  3. Si G possède un unique sous-groupe distingué abélien maximal A, alors il existe une suite exacte de la forme

     $$1 \to \mathcal{H}_0(G) \to \mathcal{H}(G) \to H^2(\widehat{A}, \mathbb{C}^\times)^G$$

     (Lorsque G possède plusieurs tels sous-groupes, il y a une formulation plus compliquée de la suite exacte précédente)

- **Exemples**

  - Si G est un groupe simple ou un groupe symétrique, alors

    $$\mathcal{H}(G) = 1$$

  - Pour A_4 qui est le seul groupe alterné non simple (il contient le groupe de Klein $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, qui est le seul sous-groupe distingué abélien maximal),

    $$\mathcal{H}(A_4) \cong H^2(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2, \mathbb{C}^\times)^{A_4} \cong \mathbb{Z}/2$$

Le groupe $\mathrm{Out}_c(G)$

- Le groupe des automorphismes intérieurs est défini par

$$\mathrm{Int}(G) = \left\{\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \mid \exists h, \forall g \in G,\ \varphi(g) = hgh^{-1}\right\}$$

Echangeons les quantificateurs :

$$\mathrm{Aut}_c(G) = \left\{\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \mid \forall g, \exists h \in G,\ \varphi(g) = hgh^{-1}\right\}$$

Un élément de $\mathrm{Aut}_c(G)$ est un automorphisme de G qui préserve chaque classe de conjugaison de G

- **Définition**. On pose $\mathrm{Out}_c(G) = \mathrm{Aut}_c(G)/\,\mathrm{Int}(G)$

- **Exemples pour lesquels** $\mathrm{Out}_c(G) = 1$

  $*$ G est un groupe symétrique (exercice)

  $*$ (Feit-Seitz, 1989) G est un groupe simple

(calcul au cas par cas utilisant la classification des groupes finis simples)

Le groupe $\mathrm{Out}_c(G)$ n'est pas toujours trivial, ni abélien

• **Burnside (1912)** a été le premier à construire des groupes pour lesquels $\mathrm{Out}_c(G) \neq 1$ (son exemple le plus petit est d'ordre $729 = 3^6$)

• **G. E. Wall (1947)** a montré que $\mathrm{Out}_c(G) = \mathbb{Z}/2$ pour le groupe d'ordre 32

$$G = \mathbb{Z}/8 \rtimes \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8)$$

• Burnside a énoncé que $\mathrm{Out}_c(G)$ est toujours abélien, mais. . .

• **C.-H. Sah (1968)** a construit des groupes où $\mathrm{Out}_c(G)$ est non abélien (son exemple le plus petit est d'ordre 2^{15})

• **Conséquence**. Il existe des groupes pour lesquels $\mathcal{H}(G)$ est non abélien
et donc des algèbres de Hopf pour lesquelles
le multiplicateur de Schur généralisé $\mathcal{M}(H)$ est non abélien

Merci de votre attention

Bibliographie ancienne...

• W. Burnside, *On the outer automorphisms of a group*, Proc. London Math. Soc. (2) 11 (1912), 225–245.

• I. Schur, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Reine Angew. Math. 127 (1904), 20-50.

• I. Schur, *Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Reine Angew. Math. 132 (1907), 85–137.

• I. Schur, *Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Reine Angew. Math. 139 (1911), 155–250.

• G. E. Wall, *Finite groups with class-preserving outer automorphisms*, J. London Math. Soc. 22 (1947), 315–320.

- V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras*, Algebra i Analiz 1 (1989), 114–148; English translation: Leningrad Math. J. 1 (1990), 1419–1457.

- W. Feit, G. M. Seitz, *On finite rational groups and related topics*, Illinois J. Math. 33 (1989), no. 1, 103–131.

- P. Guillot, C. Kassel, *Cohomology of invariant Drinfeld twists on group algebras*, Internat. Math. Res. Notices 2010, 1894–1939; arXiv:0903.2807.

- C.-H. Sah, *Automorphisms of finite groups*, J. Algebra 10 (1968), 47–68.

- P. Schauenburg, *Hopf bimodules, coquasibialgebras, and an exact sequence of Kac*, Adv. Math. 165 (2002), 194–263.

The pointed set $\mathcal{B}(G)$

- **Definition.** *Let $\mathcal{A}$ be the category whose objects are the normal abelian subgroups A of G and whose arrows are the inclusions. Define*

$$\mathcal{B}(G) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} H^2(\widehat{A}, k^\times)^G \qquad \textit{(a colimit of pointed sets)}$$

Here $\widehat{A} = \mathrm{Hom}(A, k^\times)$ is the group of characters of A and $H^2(\widehat{A}, k^\times)$ is the second cohomology group of $\widehat{A}$

Remark. If $k^\times$ is divisible, then $H^2(\widehat{A}, k^\times) \cong \mathrm{Hom}(\Lambda^2 \widehat{A}, k^\times)$

- The set $\mathcal{B}(G)$ is
  - $*$ non-empty: it is pointed by the zero element 0 lying in all $H^2(\widehat{A}, k^\times)^G$
  - $*$ it is finite

- If G has a unique maximal normal abelian subgroup A, then

$$\mathcal{B}(G) = H^2(\widehat{A}, k^\times)^G$$

Determining $\mathcal{H}^2(G/k)$

Now our main result in the algebraically closed case

Assume that the field k is algebraically closed of characteristic prime to $|G|$

Theorem 2. *There is a set-theoretic map $\Theta : \mathcal{H}^2(G/k) \to \mathcal{B}(G)$ such that*

(a) $\mathcal{H}_0 = \Theta^{-1}(\{0\})$ is a subgroup of $\mathcal{H}^2(G/k)$ with

$$\mathcal{H}_0 \cong \mathrm{Out}_c(G)$$

(b) All fibers of Θ are in bijection with $\mathcal{H}_0$; more precisely,

$$\Theta(\alpha) = \Theta(\beta) \Longleftrightarrow \beta \in \alpha\,\mathcal{H}_0 \qquad (\alpha, \beta \in \mathcal{H}^2(G/k))$$

(c) If $|G|$ is odd, then Θ is surjective

Wall's group of order 32

- The group $G = \mathbb{Z}/8 \rtimes \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8)$ of order 32 has the presentation

$$G = \langle s, t, u \mid s^2 = t^2 = u^8 = 1,\ st = ts,\ sus^{-1} = u^3,\ tut^{-1} = u^5 \rangle$$

- G. E. Wall (1947) proved that $\mathrm{Out}_c(G) = \mathbb{Z}/2$, generated by the automorphism α defined by

$$\alpha(s) = u^4 s = u^2 s u^{-2}, \quad \alpha(t) = u^4 t = utu^{-1}, \quad \alpha(u) = u$$

In fact, $\alpha(g) = aga^{-1}$ $(g \in G)$, where

$$a = \frac{1}{2}(1 + u^4) + \frac{\sqrt{2}}{4} u (1 - u^2 - u^4 + u^5) \in \mathbb{C}G$$

- The group G has a unique maximal normal abelian subgroup, namely $A = \langle t, u^4 \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. The set $\mathcal{B}(G) = H^2(\widehat{A}, k^\times)^G$ has two elements

- Therefore, $\mathcal{H}^2(G)$ has order 4 or 2 according as Θ is surjective or not

We were not able to conclude

The rationality exact sequence

Assume that k is of characteristic zero with algebraic closure $\bar{k}$

Theorem 1. *Let G be a finite group. If all irreducible $\bar{k}$-representations of G can be realized over k, then there is an exact sequence of groups*

$$
\begin{array}{ccccc}
1 \longrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), Z(G)) & \longrightarrow \mathcal{H}^2(G/k) \longrightarrow & \mathcal{H}^2(G/\bar{k}) \longrightarrow 1 \\
\textit{(classical bitorsors)} & \textit{(non-comm. bitorsors)} & \\
(\textsc{arithmetic}) & & (\textsc{geometric})
\end{array}
$$

In particular, if G has a trivial center, then $\mathcal{H}^2(G/k) \cong \mathcal{H}^2(G/\bar{k})$

Remark.

$$
\begin{aligned}
H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), Z(G)) &= \mathrm{Hom}_{\text{continuous}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), Z(G)) \\
&= \varinjlim_{\substack{k'/k \\ \text{finite Galois ext.}}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(k'/k), Z(G))
\end{aligned}
$$