L'œuvre mathématique de Jean-Louis Loday

Emily Burgunder[1], Benoit Fresse[2], Daniel Guin[3], Christian Kassel[4], Muriel Livernet[5], María Ronco[6], Bruno Vallette[7]

Dans ce texte, qui fait suite à celui de Max Karoubi paru dans ce numéro de la Gazette, nous dressons un panorama de l'œuvre scientifique de Jean-Louis Loday des années 1970 à son décès prématuré en juin 2012.

L'activité mathématique de Jean-Louis ne saurait se résumer à ses résultats. Jean-Louis ne s'est jamais comporté comme un chercheur isolé, avare de son temps ou de ses idées. Au cours de sa carrière, il a eu de nombreux collaborateurs, doctorants, post-doctorants et visiteurs ; il leur accordait beaucoup d'attention et partageait ses idées avec eux de manière désintéressée. Sous son impulsion, ces derniers ont bien évidemment contribué à l'étude et au développement de ses thèmes de recherche.

Jean-Louis a organisé de nombreuses conférences et écoles. Il ne refusait jamais une invitation à donner un exposé ou un cours, même à l'autre bout de la planète (Chili, Chine, Kazakhstan ces dernières années).

Tous ceux qui l'ont connu se souviendront par dessus tout de son humour, de son énergie et de son enthousiasme communicatifs, et de son amour pour les mathématiques.

1. Travaux en topologie algébrique

1.1. Généralisation des modules croisés

Depuis les travaux de Whitehead [50] et d'Eilenberg–MacLane [16], entre 1941 et 1945, on sait caractériser les CW-complexes connexes X dont les groupes d'homotopie $\pi_i(X)$ sont nuls pour $i > 2$. Il a fallu attendre 1982 et les travaux de Jean-Louis Loday pour obtenir une généralisation de ces résultats aux CW-complexes connexes X dont les groupes d'homotopie $\pi_i(X)$ sont nuls pour $i > n+1$, où n est un entier positif ou nul fixé.

Pour $n = 0$, la réponse est donnée par les *espaces d'Eilenberg–MacLane* $K(G, 1)$ et pour $n = 1$ par la structure de *module croisé* (dont l'archétype est $\pi_2(X, X_1) \to \pi_1(X_1)$, où X est un CW-complexe connexe et X_1 son 1-squelette) introduite par Whitehead.

L'idée très novatrice de Jean-Louis a été d'introduire une variante cubique des espaces simpliciaux et sa version algébrique. Plus précisément il a défini

[1] Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, Toulouse.
[2] Laboratoire Paul Painlevé, Université Lille 1, Villeneuve d'Ascq.
[3] Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, Université Montpellier 2.
[4] Institut de Recherche Mathématique Avancée, CNRS & Université de Strasbourg.
[5] Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, Villetaneuse.
[6] Instituto de Matemáticas y Física, Universidad de Talca, Campus Norte, Camino Lircay s/n, Talca, Chili.
[7] Laboratoire J. A. Dieudonné, Université de Nice Sophia-Antipolis, Nice.

(a) la notion de *n-cube de fibrations*, qui est la donnée d'un foncteur $\mathbb{X}$ de $\{-1 < 0 < 1\}^n$ dans la catégorie des espaces connexes tel que, pour tout i, la suite

$$\begin{array}{rl} \mathbb{X}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, -1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \to & \mathbb{X}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \\ & \downarrow \\ & \mathbb{X}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \end{array}$$

soit une fibration ;

(b) la notion de *n-cat-groupe*, qui est la donnée d'un groupe G, de n sous-groupes $N_1, \ldots, N_n$ et de $2n$ morphismes de groupes $s_i, b_i : G \to N_i$, $i = 1, \ldots, n$, qui vérifient certaines propriétés de commutation (voir [31, Déf. 1.2 et Déf. 1.3]).

Ces structures forment deux catégories ; Jean-Louis [31, Thm 1.4] construit entre elles une paire $(\mathcal{B}, \mathcal{G})$ de foncteurs adjoints permettant de les comparer.

Si $n = 0$, le foncteur $\mathcal{G}$ est le foncteur *groupe fondamental* et l'on retrouve l'équivalence entre groupes et espaces d'Eilenberg–MacLane. Si $n = 1$, on retrouve l'équivalence démontrée par Whitehead entre modules croisés et *CW*-complexes connexes dont les groupes d'homotopie sont nuls pour $i > 2$.

Cette avancée considérable a eu de nombreuses applications dans des domaines variés. Évoquons les trois domaines suivants : homologie, homotopie et K-théorie algébrique.

1.2. Homologie

Soient Q un groupe et A un Q-module. Il est bien connu que le groupe $H^2(Q, A)$ peut être interprété en termes de classes d'équivalence d'extensions de Q par A. Jean-Louis étend ce résultat au groupe $H^n(Q, A)$ en l'interprétant en termes de classes d'équivalence (de Yoneda) d'extensions construites à partir de $(n-2)$-cat-groupes. Il donne des interprétations analogues pour $H^n(K(C, k); A)$, où $K(C, k)$ est un espace d'Eilenberg–MacLane, et pour le H^2 d'un n-cube de fibrations.

1.3. Homotopie

Le célèbre théorème de van Kampen permet de calculer le groupe fondamental d'une union d'espaces topologiques. L'une des applications les plus importantes et spectaculaires de ces travaux de Jean-Louis est d'en donner une généralisation. Précisément, Ronnie Brown et Jean-Louis [6, Thm. 5.4] ont montré le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit $\mathbb{X}$ un n-cube d'espaces (i.e. un objet de la catégorie des foncteurs Fun($\{0 < 1\}^n$, Top*) et soit $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un recouvrement ouvert de $\mathbb{X}(1, \ldots, 1)$. Chaque U_σ pour $\sigma \in \Lambda_{fin}$ détermine, par image réciproque, un n-cube d'espaces $\mathbb{U}_\sigma$. On suppose que chaque $\mathbb{U}_\sigma$ est un n-cube connexe. Alors*

(i) *le n-cube $\mathbb{X}$ est connexe et*

(ii) *le morphisme naturel de n-cat-groupes $\mathrm{colim}^\sigma_{cat} \mathcal{G}\mathbb{U}_\sigma \to \mathcal{G}\mathbb{X}\mathrm{colim}^\sigma \mathbb{U}_\sigma$ est un isomorphisme.*

Une conséquence remarquable de ce théorème est un résultat d'obstruction à l'excision homotopique en basse dimension (voir [6, Cor. 3.2], [5, Thm. 1]).

Théorème 1.2. *Soit X un espace recouvert par deux ouverts A et B d'intersection $A \cap B = C$. On suppose que ces quatre espaces sont connexes et que les paires (A, C) et (B, C) sont* 1*-connexes. Alors*

$$\pi_3(X; A, B) \cong \pi_2(A, C) \otimes \pi_2(B, C).$$

Ce résultat est généralisé en un isomorphisme

$$[-, -] : \pi_{p+1}(A, C) \otimes \pi_{q+1}(B, C) \longrightarrow \pi_{p+q+1}(X; A, B)\,,$$

où $[-, -]$ est un produit de Whitehead généralisé.

Le produit tensoriel qui apparaît dans les énoncés ci-dessus est le *produit tensoriel de groupes non abéliens* défini par Brown et Loday [5, 6, 7]. Ce produit tensoriel de groupes non abéliens [8] s'est révélé très utile dans différents calculs

– *homotopiques :* ainsi,

$$\pi_3(SX) \cong \mathrm{Ker}(\pi_1(X) \otimes \pi_1(X) \xrightarrow{[-,-]} \pi_1(X))\,;$$

– *homologiques :* si $1 \to R \to F \to G \to 1$ est une suite exacte de groupes avec $H_3(F) = H_2(F) = 0$ (par exemple, si F est un groupe libre), alors

$$H_3(G) \cong \mathrm{Ker}(R \wedge F \xrightarrow{[-,-]} F)\,,$$

où $R \wedge F$ est le quotient de $R \otimes F$ par le sous-groupe normal engendré par les éléments $x \otimes x$, $x \in R$.

Le produit tensoriel de groupes non abéliens, qui a un intérêt en soi, a ouvert la voie aux travaux de nombreux auteurs, notamment en cohomologie non abélienne des groupes dans le cadre des modules croisés.

1.4. K-théorie algébrique

Un 2-cat-groupe est un *carré croisé*. Cette dernière notion généralise celle de module croisé et avait été définie antérieurement dans [24] : elle est à l'origine des travaux de Jean-Louis évoqués ci-dessus.

Cette notion de carré croisé a été introduite pour définir et calculer le groupe de K-théorie birelative $K_2(\Lambda; I, J)$ qui mesure l'obstruction à l'excision dans la suite exacte de Mayer-Vietoris (qui est l'un des moyens efficaces pour calculer des groupes de K-théorie algébrique). Précisément, si I et J sont des idéaux de l'anneau Λ tels que $I \cap J = \{0\}$, on a

$$K_2(\Lambda; I, J) \cong I \otimes_{\Lambda^e} J\,,$$

où $\Lambda^e = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^\circ$.

En construisant algébriquement le groupe linéaire et le groupe de Steinberg birelatifs, on obtient une interprétation homologique des groupes de K-théorie birelative analogue aux isomorphismes

$$K_1(\Lambda) \cong H_1(GL(\Lambda))\,, \quad K_2(\Lambda) \cong H_2(E(\Lambda))\,, \quad K_3(\Lambda) \cong H_3(St(\Lambda))\,. \tag{1}$$

[8] Lue [44] avait déjà défini ce produit tensoriel dans certains cas particuliers.

1.5. Symboles

Parallèlement à ces travaux, Jean-Louis, qui aimait avoir « plusieurs fers au feu », a travaillé sur les *symboles en K-théorie algébrique supérieure*. Inspiré par [23], il a construit de nouveaux éléments, notés

$$\langle -, \dots, - \rangle \quad \text{et} \quad \langle\langle -, \dots, - \rangle\rangle \qquad (n\,\text{arguments})$$

dans les groupes $K_n(A)$.

Les éléments $\langle -, \dots, - \rangle$ sont définis dans le cadre des anneaux commutatifs. Soient $a_1, \dots, a_n$ des éléments d'un anneau commutatif A tels que $1 - a_1 \cdots a_n$ soit inversible. Par une utilisation astucieuse du produit en K-théorie, qu'il avait construit dans sa thèse, et de la suite exacte de localisation de Quillen, Jean-Louis construit un élément $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ dans $K_n(A)$ (voir [30, Déf. 1.1]). Il montre [30, Prop. 1.7] que ces éléments satisfont à des relations remarquables et établit que, dans le cas d'un corps commutatif F, le groupe engendré par ces éléments et soumis à ces relations est isomorphe au groupe de K-théorie de Milnor $K_n^M(F)$.

Les éléments $\langle\langle -, \dots, - \rangle\rangle$ sont définis, dans le cadre des anneaux non commutatifs, pour des éléments $b_1, \dots, b_n$ de A tels que

$$b_1 b_2 = b_2 b_3 = \cdots = b_{n-1} b_n = b_n b_1 = 0\,.$$

Jean-Louis pose $\langle\langle b_1, \dots, b_n \rangle\rangle = \{e_{12}(b_1), \dots, e_{n1}(b_n)\}$, où $e_{12}(b_1), e_{23}(b_2) \dots$, $e_{n1}(b_n)$ sont des matrices élémentaires et le membre de droite est un symbole de Steinberg généralisé ([30, Déf. 2.4]). Il en déduit des résultats intéressants pour la K-théorie de l'anneau des nombres duaux $R[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ et la compare aux modules des différentielles de Kähler (voir [30, Thm. 3.1]).

Ces éléments ont été utilisés par Beilinson pour construire des éléments non triviaux dans la K-théorie des entiers de corps de nombres. Certaines propriétés de ces éléments ont amené Jean-Louis à les comparer à des calculs d'Alain Connes, ce qui l'a conduit à s'intéresser à l'homologie cyclique.

2. Homologie cyclique

2.1. Homologie des algèbres de Lie de matrices

Étant donné une algèbre associative A sur un corps fixé k et un entier $n \geqslant 1$, on note $\mathfrak{gl}_n(A)$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans A ; on la munit d'une structure d'algèbre de Lie dont le crochet est donné par le commutateurs des matrices

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Les éléments $X \in \mathfrak{gl}_n(A)$ dont la trace $\mathrm{tr}(X)$ appartient au sous-espace $[A, A]$ des commutateurs de A forment la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(A)$ de $\mathfrak{gl}_n(A)$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(A)$ se plonge naturellement dans $\mathfrak{gl}_{n+1}(A)$ et on peut considérer l'union $\mathfrak{gl}(A) = \cup_n \mathfrak{gl}_n(A)$. C'est une algèbre de Lie contenant $\mathfrak{sl}(A) = \cup_n \mathfrak{sl}_n(A)$ comme sous-algèbre de Lie.

Par analogie avec les premiers groupes de K-théorie algébrique et les isomorphismes (1), Jean-Louis et C. Kassel ont considéré dans [27] les premiers groupes d'homologie des algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(A)$ et $\mathfrak{sl}(A)$ comme les premiers groupes d'une version linéaire de la K-théorie algébrique et posé

$$K_1^L(A) = H_1(\mathfrak{gl}(A), k) \quad \text{et} \quad K_2^L(A) = H_2(\mathfrak{sl}(A), k).$$

De simples manipulations de matrices permettent de montrer que

$$H_1(\mathfrak{gl}_n(A)) \cong A/[A, A]\,.$$

Il en résulte que $K_1^L(A) \cong A/[A, A]$. On notera que $H_1(\mathfrak{sl}_n(A)) = 0$ si $n \geqslant 3$.

Bloch [1] avait démontré[9] que, si l'algèbre A est commutative, alors

$$H_2(\mathfrak{sl}_n(A), k) \cong \Omega^1_{A/k}/dA \quad (n \geqslant 5),$$

ce qui permet d'identifier $K_2^L(A)$ à l'espace vectoriel $\Omega^1_{A/k}/dA$ des 1-formes différentielles de Kähler modulo les formes exactes.

Le résultat principal de [27] est une généralisation de l'isomorphisme de Bloch aux algèbres non nécessairement commutatives.

Théorème 2.1. *Soit A une algèbre associative. Alors le groupe $K_2^L(A)$ est isomorphe au premier groupe d'homologie cyclique $HC_1(A)$ de A :*

$$K_2^L(A) \cong HC_1(A).$$

Lorsque l'algèbre A est commutative, on a $HC_1(A) \cong \Omega^1_{A/k}/dA$ et on retrouve le résultat de Bloch.

L'homologie cyclique d'une algèbre associative A a été introduite à cette occasion pour la première fois comme l'homologie du quotient du complexe standard de Hochschild de A par une action naturelle du groupe cyclique. Dans *loc. cit.* cette homologie était appelée « homologie de Connes » dont Alain Connes [12] avait défini une version cohomologique peu de temps auparavant.

L'article [40], écrit avec Quillen, allait connaître un grand retentissement avec le résultat suivant, établi indépendamment par Boris Tsygan [49].

Théorème 2.2. *Soit A une algèbre associative sur un corps de caractéristique nulle. Alors l'homologie $H_*(\mathfrak{gl}(A), k)$ forme une algèbre de Hopf dont la partie primitive s'identifie à l'homologie cyclique de A :*

$$HC_{*-1}(A) = \mathrm{Prim}\, H_*(\mathfrak{gl}(A))\,.$$

Ce théorème avait été conjecturé par Jean-Louis comme une extension naturelle du théorème 2.1. Il avait exposé cette conjecture dans un séminaire à Oxford ; deux semaines plus tard, il recevait de Daniel Quillen, qui avait assisté à son exposé, une lettre esquissant une preuve de cette conjecture à l'aide de la théorie des invariants.

Dans [40] l'homologie cyclique est soigneusement définie comme l'homologie d'un certain bicomplexe, d'où découlait immédiatement la suite exacte de Connes reliant l'homologie de Hochschild d'une algèbre associative A à son homologie cyclique :

$$\cdots \xrightarrow{B} HH_n(A) \xrightarrow{I} HC_n(A) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{B} HH_{n-1}(A) \xrightarrow{I} \cdots$$

[9] L'isomorphisme de Bloch avait été préalablement établi par Garland [20] pour l'algèbre des polynômes de Laurent $A = k[t, t^{-1}]$.

Notons que le terme d'homologie cyclique était apparu pour la première fois dans l'annonce [39].

2.2. Développement de l'homologie cyclique

À la suite de [40] et de l'article fondateur [12] de Connes, la théorie de la (co)homologie cyclique allait devenir une partie indépendante et active de l'algèbre homologique, ayant des applications dans des domaines aussi variés que la K-théorie topologique, la K-théorie algébrique, la K-théorie algébrique des espaces topologiques construite par Waldhausen, la géométrie non-commutative de Connes, l'analyse globale des variétés, l'analyse fonctionnelle et la physique théorique (*cf.* [10] et la monographie [36] qui est devenue la référence sur le sujet).

C'est aux aspects algébriques de l'homologie cyclique que Jean-Louis et son équipe strasbourgeoise allaient se consacrer au cours des dix années suivantes. Citons quelques résultats importants qu'il a obtenus pendant cette période très féconde.

Connes [11] avait montré que l'homologie cyclique pouvait être interprétée comme foncteur dérivé de « modules cycliques », c'est-à-dire de foncteurs de la catégorie cyclique ΔC vers la catégorie des modules. La catégorie ΔC est une extension de la catégorie simpliciale par la suite C_n des groupes cycliques. On peut remplacer les groupes cycliques par d'autres suites de groupes comme les groupes diédraux et les groupes quaternioniens, et ainsi construire des généralisations de l'homologie cyclique. C'est de cette manière que Jean-Louis définit dans [32] l'homologie diédrale et l'homologie quaternionienne d'une algèbre associative munie d'une involution $a \mapsto \bar{a}$. Voir aussi son travail sur les groupes croisés simpliciaux en collaboration avec Fiedorowicz [19].

Dans un article avec Procesi [38], Jean-Louis démontre un analogue de son théorème avec Quillen en établissant que l'homologie diédrale d'une algèbre involutive A est la partie primitive de l'algèbre de Hopf $H_*(\mathfrak{o}(A), k)$, où $\mathfrak{o}(A)$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(A)$ formée des éléments X tels que ${}^tX = \overline{X}$.

Gerstenhaber et Schack [21] avaient montré qu'en caractéristique zéro l'homologie de Hochschild d'une algèbre commutative avait une décomposition naturelle qu'ils appelaient la « décomposition de Hodge ». Burghelea–Vigué [8] et Feigin–Tsygan [17] en obtenaient une pour l'homologie cyclique. Dans [33] Jean-Louis retrouve ces décompositions dans un cadre beaucoup plus général qui lui permet de définir des λ-opérations et des opérations d'Adams sur l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique d'une algèbre commutative. Ces opérations ont un intérêt supplémentaire en ce qu'elles sont intimement liées à la combinatoire des permutations, notamment avec les partitions eulériennes (voir aussi [35] et [46]).

Rappelons que le complexe $C_*(A, M)$ qui détermine l'homologie de Hochschild $HH_*(A, M)$ d'une algèbre A dans un bimodule M s'écrit $C_n(A, M) = A^{\otimes n} \otimes M$ en degré n. Jean-Louis observe que, pour une algèbre commutative et un bimodule symétrique (tel que $am = ma$), l'application $n \mapsto A^{\otimes n} \otimes M$ définit un foncteur sur la catégorie dont les objets sont les ensembles $[n] = \{0, \ldots, n\}$ et dont les morphismes sont les applications $u : [m] \to [n]$ telles que $u(0) = 0$. Puis il considère l'extension de ce foncteur $\mathcal{L}(A, M)([n]) = A^{\otimes n} \otimes M$ à la catégorie Fin' constituée de tous les ensembles finis pointés. Il construit en fait la décomposition de l'homologie de Hochschild et les opérations d'Adams au moyen de cette structure fonctorielle. Il procède d'une façon analogue pour l'homologie cyclique, en travaillant cette fois avec la catégorie *Fin* constituée des ensembles finis non pointés (avec toutes les applications ensemblistes comme morphismes).

Une conséquence de l'approche de Jean-Louis est que la décomposition de Hodge se généralise pour des complexes associés à des foncteurs sur les catégories *Fin'* et *Fin*. Cette observation s'est révélée fructueuse dans les applications de l'homologie de Hochschild (resp. de l'homologie cyclique) en topologie algébrique, notamment dans l'étude des structures de l'homologie (resp. de l'homologie équivariante) des espaces de lacets libres qui constitue le pendant topologique de la théorie (voir [26, 47]).

3. Algèbres de Leibniz et coquecigrues

En 1989 Jean-Louis Loday observait que la différentielle du complexe de Chevalley-Eilenberg Λ^*L donnant l'homologie d'une algèbre de Lie L pouvait se relever en une différentielle d sur l'algèbre tensorielle T^*L et que pour ce faire seule l'identité de Jacobi

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]$$

était nécessaire. Jean-Louis appelait *algèbre de Leibniz*[10] tout espace vectoriel L muni d'un crochet vérifiant cette identité. L'homologie $HL_*(L)$ d'une algèbre de Leibniz L est par définition l'homologie du complexe (T^*L, d). On peut appliquer cette nouvelle théorie d'homologie aux algèbres de Lie qui sont des algèbres de Leibniz dont les crochets sont antisymétriques et ainsi considérer l'homologie de Leibniz de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(A)$ considérée au § 2.1. Jean-Louis et son élève Cuvier [14, 36] ont obtenu le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soit A une algèbre associative sur un corps de caractéristique nulle. Alors l'homologie de Leibniz de $\mathfrak{gl}(A)$ est donnée par*

$$HL_*(\mathfrak{gl}(A)) = T(HH_{*-1}(A)).$$

L'homologie de Leibniz hérite d'un coproduit (dont on comprendra mieux la structure au § 4). Le résultat obtenu dans ce théorème entraîne que l'homologie de Hochschild $HH_{*-1}(A)$ s'identifie à la partie primitive de $HL_*(\mathfrak{gl}(A))$ pour la structure comultiplicative définie par ce coproduit.

À partir de là, les algèbres de Leibniz (parfois appelées « algèbres de Loday » dans la littérature) ont connu un développement rapide[11] en rapport aussi bien avec la géométrie différentielle que la physique mathématique.

C'est cependant pour la relation avec l'homologie que Jean-Louis s'est engagé dans l'étude des algèbres de Leibniz. Son idée générale, que nous allons expliquer, était de comprendre, en termes de structures algébriques, des phénomènes de périodicité qui apparaissent en homologie cyclique et en K-théorie algébrique. C'est ce programme qui allait motiver ses travaux de la décennie 1990–2000.

[10] Comme il arrive souvent, les algèbres de Leibniz avaient déjà été définies, très précisément dans les années 1960 par A. Blokh [2], qui les appelaient « D-algèbres » ; Blokh avait également construit une théorie d'homologie pour ces algèbres [3].

[11] Une recherche sommaire sur *MathSciNet* fait apparaître plus de 250 articles concernant les algèbres de Leibniz.

La suite exacte de Connes, dont on a rappelé la forme au § 2.1, montre que l'homologie de Hochschild $HH_*(A)$ représente l'obstruction pour que le morphisme de périodicité de Connes $HC_n(A) \to HC_{n-2}(A)$ soit un isomorphisme. Le théorème 2.2 montre que l'homologie cyclique est la partie primitive de l'homologie de Chevalley–Eilenberg des matrices : $HC_{*-1}(A) = \mathrm{Prim}\, H_*(\mathfrak{gl}(A))$. On interprète cette identité comme un analogue infinitésimal de la relation entre l'homologie du groupe linéaire et la K-théorie algébrique au-dessus du corps des rationnels : $K_*(A)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Prim}\, H_*(\mathrm{GL}(A), \mathbb{Q})$. Le théorème 3.1 montre que l'homologie de Hochschild représente la partie primitive de l'homologie de Leibniz : $HH_{*-1}(A) = \mathrm{Prim}\, H_*(\mathfrak{gl}(A))$. La proposition de Jean-Louis est que cette identité formait l'analogue infinitésimal d'une relation conjecturale

$$KL_*(A)_{\mathbb{Q}} \stackrel{?}{=} \mathrm{Prim}\, HL_*(\mathrm{GL}(A), \mathbb{Q})$$

qui ferait apparaître une théorie d'homologie de Leibniz $HL_*(-, \mathbb{Q})$ pour les groupes et une K-théorie de Leibniz $KL_*(-)$, laquelle contrôlerait les obstructions à la construction de classes périodiques en K-théorie algébrique.

L'objectif ultime du programme de Jean-Louis était de construire cette théorie d'homologie $HL_*(-, \mathbb{Q})$, et son idée était de la déterminer comme la théorie d'homologie associée à des structures, les *coquecigrues*, formant pour les algèbres de Leibniz l'analogue des groupes pour des algèbres de Lie (voir [34]). Un candidat potentiel pour l'homologie de Leibniz des groupes a été proposé par Covez [13] suivant une observation de Kinyon [28] reliant les algèbres de Leibniz à des structures algébriques appelées *racks*.[12] Les résultats obtenus avec l'homologie des racks corroborent des propriétés des coquecigrues dégagées par Jean-Louis pendant les années 1990–2000 au moyen d'une théorie, la théorie des opérades, qu'une découverte de Ginzburg et Kapranov [22] venait tout juste de refonder.

4. Opérades et théories d'homologie

Une opérade est une structure collectant l'ensemble des opérations multiplicatives que l'on peut associer à une catégorie d'algèbres. Cette notion avait été introduite en topologie à la fin des années 1960 pour comprendre la structure des espaces de lacets (travaux de Stasheff [48], Boardman et Vogt [4], et May [45]). La théorie a été profondément renouvelée quand Ginzburg et Kapranov ont compris qu'un phénomène de dualité observé par Kontsevich dans l'étude des complexes de graphes [29] se formalisait en termes d'une relation de dualité opéradique, la dualité de Koszul [22]. Ce travail [22] ouvrait la voie aux applications des opérades en algèbre.

Les catégories classiques d'algèbres, les algèbres commutatives, les algèbres associatives, les algèbres de Lie sont associées à des opérades notées respectivement *Com*, *As* et *Lie*. Les opérades *Com* et *Lie* sont duales de Koszul l'une de l'autre dans la théorie de Ginzburg–Kapranov et l'opérade *As* est auto-duale. Ce résultat permettait d'interpréter, dans un cadre général, les correspondances entre les structures multiplicatives de l'homologie des algèbres commutative et de l'homologie

[12] Également appelées *automorphic sets* par Brieskorn et *distributive groupoids* par Matveev, ces structures apparaissent aussi en théorie des nœuds (voir [18]).

des algèbres de Lie qui avaient notamment été exploitées dans la construction des modèles de l'homotopie rationnelle des espaces.

Jean-Louis a rapidement prouvé que les algèbres de Leibniz étaient associées à une opérade *Leib* et a calculé son opérade de Koszul duale, l'opérade de Zinbiel *Zinb*, pour en déduire la structure multiplicative fine de l'homologie de Leibniz. Ce calcul constituait la première application nouvelle de la théorie de Ginzburg–Kapranov. Il permet de comprendre la différence de structure qui apparaît entre les théorèmes 2.2 et 3.1 quand on calcule l'homologie de Lie et l'homologie de Leibniz des matrices.

Plus précisément, on a rappelé dans le théorème 2.2 que l'homologie des matrices forme une algèbre de Hopf. Cette algèbre de Hopf est commutative et cocommutative. Le théorème de Cartier–Milnor–Moore entraîne alors que $H_*(\mathfrak{gl}(A))$ forme une algèbre symétrique sur sa partie primitive. Dans ce cas, on a $HC_{*-1}(A) = \operatorname{Prim} H_*(\mathfrak{gl}(A))$, ce qui implique $H_*(\mathfrak{gl}(A)) = S(HC_{*-1}(A))$. L'algèbre symétrique dans cette relation représente le foncteur sous-jacent d'une structure de cogèbre cocommutative (conilpotente) colibre.

L'algèbre tensorielle dans l'identité $HL_*(\mathfrak{gl}(A)) = T(HH_{*-1}(A))$ du théorème 3.1 représente en fait le foncteur sous-jacent d'une structure de cogèbre de Zinbiel (conilpotente) colibre pour le coproduit considéré dans la thèse de Cuvier sur l'homologie de Leibniz, et ceci explique la relation $HH_{*-1}(A) = \operatorname{Prim} T(HH_{*-1}(A)) = \operatorname{Prim} HL_*(\mathfrak{gl}(A))$ mentionnée après l'énoncé du Théorème 3.1. L'homologie de Leibniz des matrices $HL_*(\mathfrak{gl}(A))$ ne forme pas une algèbre de Hopf au sens classique, mais elle possède une structure de bigèbre en un sens généralisé, et son identité avec une structure de cogèbre de Zinbiel colibre s'interprète dans la théorie générale des triples d'opérades que Jean-Louis allait développer plus tard (voir § 5.3).

Jean-Louis allait poursuivre sa compréhension des structures potentielles sous-jacentes aux coquecigrues en développant des analogies qu'il formalisait par la définition de nouvelles opérades. Le cadre de son approche se résume par un diagramme d'opérades, le « papillon opéradique » (*operadic butterfly*) :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathit{Dend} \arrow[dl] & & \mathit{Dias} \arrow[dl] & \\
\mathit{Zinb} & & \mathit{As} \arrow[ul] \arrow[dl] & & \mathit{Leib} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \mathit{Com} \arrow[ul] & & \mathit{Lie} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Les flèches de ce diagramme représentent des morphismes d'opérades et chacun de ces morphismes donne lieu à un couple de foncteurs adjoints au niveau des catégories d'algèbres. Le morphisme $\mathit{Lie} \to \mathit{As}$, par exemple, est associé à l'adjonction classique entre la catégorie des algèbres de Lie et la catégorie des algèbres associatives, le foncteur algèbre enveloppante classique donnant l'adjoint à gauche de cette adjonction. La symétrie d'axe vertical (marquée en pointillé dans la figure) reflète les relations de dualité de Koszul qui lient les opérades de ce diagramme.

Le parallélisme entre les flèches diagonales matérialise les analogies des relations entre opérades. L'opérade *Dias* des algèbres diassociatives est à l'opérade de Leibniz *Leib* ce qu'est l'opérade associative *As* à celle des algèbres de Lie *Lie*. Plus précisément, on a un foncteur dialgèbre enveloppante des algèbres de Leibniz vers les algèbres diassociatives, analogue au foncteur algèbre enveloppante classique des algèbres de Lie vers les algèbres associatives, et Jean-Louis montre que l'homologie d'une algèbre de Leibniz est égale à l'homologie de l'algèbre enveloppante associée, de la même façon que l'homologie d'une algèbre de Lie est égale à l'homologie de son algèbre enveloppante. L'opérade *Dend* des algèbres dendriformes a été déterminée comme le dual de Koszul de l'opérade *Dias* et donne la structure multiplicative de l'homogie des dialgèbres. Une des conjectures, vérifiée par Covez, était que l'homologie de Leibniz d'une coquecigrue avait une structure d'algèbre dendriforme.

Mais les algèbres dendriformes allaient aussi s'avérer liées à des questions intervenant dans d'autres domaines.

5. Opérades, bigèbres, et combinatoire

5.1. Opérade dendriforme et algèbre de Hopf d'arbres

Jean-Louis a calculé les dimensions des composantes homogènes de l'algèbre dendriforme libre sur un générateur et montré qu'elles coïncidaient avec les nombres de Catalan, donc qu'il existait une bijection avec les arbres planaires binaires. Cette découverte le confortera dans l'intérêt de l'étude des structures dendriformes.

Utilisant une application classique du groupe symétrique vers l'ensemble des arbres planaires binaires, Jean-Louis et María Ronco démontrent dans [41] que l'algèbre dendriforme libre est munie d'une structure d'algèbre de Hopf qui en fait une sous-algèbre de Hopf de celle de Malvenuto–Reutenauer (basée sur le groupe symétrique). Cet article majeur a eu beaucoup d'impact dans plusieurs domaines : en théorie de la renormalisation, puisque c'est une version non-commutative d'une algèbre de Hopf construite par Connes et Kreimer à partir d'arbres non-planaires ; en combinatoire, car cet article donne une structure dendriforme sur l'algèbre de Hopf de Malvenuto–Reutenauer et ouvre la voie à de telles structures sur d'autres algèbres de Hopf utilisées en combinatoire (comme celle des fonctions symétriques non commutatives, celles des fonctions parkings).

5.2. Associaèdres

Par ailleurs, les arbres planaires binaires codent les sommets du polyèdre de Stasheff, appelé aussi *associaèdre*, qui est une décomposition cellulaire de la sphère. Ainsi, dans l'article [41], les morphismes d'algèbres de Hopf obtenus sont interprétés comme des applications cellulaires entre diverses décompositions cellulaires des sphères. C'est en voulant généraliser ces résultats (structures d'algèbres de Hopf, d'opérades) à toutes les faces de l'associaèdre que Jean-Louis et María ont défini la notion d'algèbres tridendrifromes et de trialgèbres.

L'associaèdre est un objet qui fascinait particulièrement Jean-Louis pour sa structure arborescente et par conséquent pour son lien avec les opérades et les structures associatives à homotopie près, les A_∞-algèbres. Il a consacré beaucoup

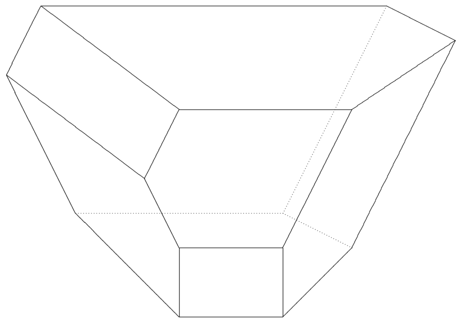

FIG. 1: Associaèdre de dimension 3

de temps à valoriser la beauté des associaèdres, notamment par des articles de vulgarisation, mais aussi des objets plus insolites comme des cartes de vœux et des T-shirts.

5.3. Théorème de Cartier–Milnor–Moore et triples d'opérades

Ainsi qu'il a été dit plus haut, l'introduction des algèbres dendriformes provient du programme de Jean-Louis sur les coquecigrues. Il voulait trouver dans le cadre des algèbres diassociatives des résultats similaires à la décomposition de Hodge de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique d'une algèbre associative et commutative. Pour ce faire, il fallait dégager un théorème de type Poincaré–Birkhoff–Witt pour les algèbres dendriformes. C'est en travaillant ce cas qu'il est arrivé à la conclusion qu'il devait y avoir un théorème bien plus général dans le cadre opéradique.

Jean-Louis aimait présenter ensemble les théorèmes de Poincaré–Birkhoff–Witt et Cartier–Milnor–Moore comme suit. Pour toute algèbre de Hopf cocommutative $\mathcal{H}$ sur un corps de caractéristique 0, les affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathcal{H}$ est conilpotente ;
(2) $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\mathcal{U}(\mathrm{Prim}\mathcal{H})$;
(3) $\mathcal{H}$ est colibre parmi les cogèbres cocommutatives conilpotentes.

Ici $\mathcal{U}$ désigne le foncteur algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie. La généralisation de ce théorème aux opérades repose sur l'observation suivante. L'algèbre de Hopf considérée admet une structure cogébrique commutative (*Com*), une structure algébrique associative (*As*) et l'espace des primitifs admet une structure algébrique d'algèbre de Lie (*Lie*). Il notait ces structures comme le triple opéradique (Com, As, Lie). La notion cachée dans cette écriture de triplet est la loi de compatibilité entre *Com* et *As* : pour définir une algèbre de Hopf, il faut préciser que le coproduit est un morphisme d'algèbres. Cette contrainte de compatibilité est un exemple de loi distributive entre structures définies par des opérades.

L'idée de Jean-Louis était d'étendre ce théorème aux $\mathcal{C}$-$\mathcal{A}$-bigèbres, où la structure cogébrique $\mathcal{C}$ et la structure algébrique $\mathcal{A}$ sont définies par des opérades liées par une relation de compatibilité déterminée par une loi distributive. Il a montré qu'il existait une structure algébrique, également définie par une opérade $\mathcal{P}$, sur l'espace des primitifs d'une $\mathcal{C}$-$\mathcal{A}$-bigèbre. Le triplet $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ainsi défini est appelé *triple d'opérades*. Le foncteur des primitifs admet un adjoint à gauche, le foncteur algèbre enveloppante noté $\mathcal{U}$. Dans le cas du triple $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{P}) = (\mathit{Com}, \mathit{As}, \mathit{Lie})$, on retrouve la définition du foncteur algèbre enveloppante classique.

La force du résultat obtenu dans [42] pour les bigèbres unitaires infinitésimales est que Jean-Louis et María Ronco ont réalisé que, pour obtenir un théorème de type Cartier–Milnor–Moore, il fallait également changer la loi distributive. Dans cet article, ils montrent que $(\mathit{As}, \mathit{As}, \mathrm{Vect})$ avec la loi unitaire infinitésimale vérifie un théorème de type Cartier–Milnor–Moore. Ce résultat a d'importantes conséquences : il permet notamment de démontrer assez facilement que certaines algèbres de Hopf sont libres comme algèbres associatives. Fort de cet exemple et de bien d'autres développés dans la même période, Jean-Louis a rédigé la monographie [37] donnant des conditions pour lesquelles un triple $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est un « bon triple ».

Plus précisément, il démontre le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Supposons que le triple d'opérades $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ soit un bon triple. Alors pour toute $\mathcal{C}$-$\mathcal{A}$-bigèbre $\mathcal{H}$ sur un corps de caractéristique nulle, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *$\mathcal{H}$ est conilpotente ;*
(2) *$\mathcal{H}$ est isomorphe à $\mathcal{U}(\mathrm{Prim}\,\mathcal{H})$ comme $\mathcal{C}$-$\mathcal{A}$-bigèbre ;*
(3) *$\mathcal{H}$ est colibre parmi les $\mathcal{C}$-cogèbres conilpotentes.*

La démonstration de ce théorème fait intervenir de manière cruciale la construction d'un idempotent définissant une projection de $\mathcal{H}$ sur sa partie primitive.[13]

On trouvera dans [37] une liste détaillée de tous les triples d'opérades que Jean-Louis a considérés. Cette idée d'encyclopédie des types d'algèbres a été poursuivie dans [51].

5.4. Opérades algébriques

Pour Jean-Louis, la dualité de Koszul des opérades fut un déclic important : il avait alors entrevu la portée novatrice des opérades algébriques. Jean-Louis avait senti la puissance conceptuelle de cette notion qui permet de coder, en un seul objet mathématique, toute une catégorie d'algèbres d'un certain type, mais aussi d'organiser les liens (foncteurs) entre ces dernières. Il a exposé le sujet au Séminaire Bourbaki en 1994 sur le sujet ; son exposé s'intitulait très justement « la renaissance des opérades », expression qui restera dans les esprits.

Durant la période 2005–2012, il a travaillé à la rédaction d'un livre de synthèse sur le sujet [43]. Des travaux de Hoffbeck [25] et Dotsenko–Koroshkin [15] venaient de dégager une approche effective pour établir qu'une opérade est de Koszul et ouvraient la voie à de nouvelles applications de techniques de réécriture dans le cadre des opérades. L'article [15] établissait notamment une version opéradique du lemme de confluence (en anglais, *diamond lemma*). Jean-Louis avait tenu à mettre en avant ces méthodes. En effet, il avait commencé depuis plusieurs années à

[13] La structure colibre de l'homologie de Leibniz des matrices $HL_*(\mathfrak{gl}(A))$ mentionnée aux §§ 3–4 peut ainsi s'expliquer *a posteriori* par l'existence d'un bon triple $(\mathit{Zinb}, \mathit{As}, \mathit{Vect})$ où l'opérade *Zinb* donne la structure comultiplicative (voir [9]).

interagir régulièrement avec des chercheurs venant de la logique et de l'informatique théorique.

6. Références

[1] S. Bloch, *Extensions centrales d'algèbres de Lie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 32 (1982), 119–142.

[2] A. Ya. Blokh, *On a generalization of the concept of Lie algebra*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 165 (1965), 471–473 ; trad. anglaise dans Soviet Math. Dokl. 6 (1965), 1450–1452.

[3] A. Ya. Blokh, *Cartan–Eilenberg homology theory for a generalized class of Lie algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 175 (1967), 266–268 ; trad. anglaise dans Soviet Math. Dokl. 8 (1967), 824–826.

[4] J. Boardman, R. Vogt, *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Lecture Notes in Mathematics 347, Springer-Verlag, 1973.

[5] R. Brown, J.-L. Loday, *Excision homotopique en basse dimension*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 298 (1984), 353–356.

[6] R. Brown, J.-L. Loday, *Van Kampen theorems for diagrams of spaces*, Topology 26 (3) (1987), 311–335.

[7] R. Brown, J.-L. Loday, *Homotopical excision, and Hurewicz theorems for n-cubes of spaces*, Proc. London Math. Soc. (3) 54 (1987), 176–192.

[8] D. Burghelea, M. Vigué-Poirrier, *Cyclic homology of commutative algebras, I*, Algebraic topology—rational homotopy (Louvain-la-Neuve, 1986), 51–72, Lecture Notes in Math., 1318, Springer, Berlin, 1988.

[9] E. Burgunder, *A symmetric version of Kontsevich graph complex and Leibniz homology*, J. Lie Theory 20 (2010), 127–165.

[10] P. Cartier, *Homologie cyclique : rapport sur des travaux récents de Connes, Karoubi, Loday, Quillen,...*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1983/84, Astérisque No. 121–122 (1985), 123–146.

[11] A. Connes, *Cohomologie cyclique et foncteurs* Ext^n, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 296 (1983), 953–958.

[12] A. Connes, *Noncommutative differential geometry*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 62 (1985), 257–360.

[13] S. Covez, *On the conjectural Leibniz cohomology for groups*, J. K-Theory 10 (2012), no. 3, 519–563.

[14] C. Cuvier, *Algèbres de Leibnitz : définitions, propriétés*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 27 (1994), 1–45.

[15] V. Dotsenko, A. Khoroshkin, *Gröbner bases for operads*, Duke Math. J. **153** (2010), no. 2, 363–396.

[16] S. Eilenberg, S. MacLane, *Relations between homotopy and homology groups of spaces*, Ann. Math. 46 (1945), 480–509.

[17] B. L. Feigin, B. L. Tsygan, *Additive K-theory*, K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986), 67–209, Lecture Notes in Math., 1289, Springer, Berlin, 1987.

[18] R. Fenn, C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications 1 (1992), 343–406.

[19] Z. Fiedorowicz, J.-L. Loday, *Crossed simplicial groups and their associated homology*, Trans. Amer. Math. Soc. 326 (1991), 57–87.

[20] H. Garland, *The arithmetic theory of loop groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 52 (1980), 5–136.

[21] M. Gerstenhaber, S. D. Schack, *A Hodge-type decomposition for commutative algebra cohomology*, J. Pure Appl. Algebra 48 (1987), 229–247.

[22] V. Ginzburg, M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. 76 (1995), 203–272.

[23] D. Guin, *Sur le groupe K_3 d'un anneau*, Proc. Oberwolfach Conf. on Algebraic K-theory, 1980, Lecture Notes in Mathematics, 967 (1982), 81–100, Springer-Verlag.

[24] D. Guin-Waléry, J.-L. Loday, *Obstruction à l'excision en K-théorie algébrique*, Proc. Evanston Conf. on Algebraic K-theory, 1980, Lecture Notes in Mathematics, 854 (1981), 179–216, Springer-Verlag.

[25] E. Hoffbeck, *A Poincaré-Birkhoff-Witt criterion for Koszul operads*, Manuscripta Math. 131 (2010), 87–110.
[26] J. D. S. Jones, *Cyclic homology and equivariant homology*, Invent. Math. 87 (1987), 403–423.
[27] C. Kassel, J.-L. Loday, *Extensions centrales d'algèbres de Lie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 32 (1982), 119–142.
[28] M. Kinyon, *Leibniz algebras, Lie racks, and digroups*, J. Lie Theory 17 (2007), 99–114.
[29] M. Kontsevich, *Formal (non)commutative symplectic geometry*, The Gel'fand Mathematical Seminars, 1990–1992, Birkhäuser Boston (1993), 173–187.
[30] J.-L. Loday, *Symboles en K-théorie algébrique supérieure*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 292 (1981), 863–866.
[31] J.-L. Loday, *Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups*, J. Pure Appl. Algebra 24 (1982), 179–202.
[32] J.-L. Loday, *Homologies diédrale et quaternionique*, Adv. in Math. 66 (1987), 119–148.
[33] J.-L. Loday, *Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives*, Invent. Math. 96 (1989), 205–230.
[34] J.-L. Loday, *Une version non commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz*, Enseign. Math. (2) 39 (1993), 269–293.
[35] J.-L. Loday, *Série de Hausdorff, idempotents eulériens et algèbres de Hopf*, Exposition. Math. 12 (1994), 165–178.
[36] J.-L. Loday, *Cyclic homology. Appendix E by María O. Ronco*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 301, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
[37] J.-L. Loday, *Generalized bialgebras and triples of operads*, Astérisque, 320, 2008.
[38] J.-L. Loday, C. Procesi, *Homology of symplectic and orthogonal algebras*, Adv. in Math. 69 (1988), 93–108.
[39] J.-L. Loday, D. Quillen, *Homologie cyclique et homologie de l'algèbre de Lie des matrices*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 296 (1983), 295–297.
[40] J.-L. Loday, D. Quillen, *Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices*, Comment. Math. Helv. 59 (1984), 569–591.
[41] J.-L. Loday, M. Ronco, *Hopf algebra of the planar binary trees*, Adv. in Math. (2) 139 (1998), 293–309.
[42] J.-L. Loday, M. Ronco, *On the structure of cofree Hopf algebras*, J. Reine Angew. Math. 592 (2006), 123–155.
[43] J.-L. Loday, B. Vallette, *Algebraic operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 346, Springer-Verlag, Berlin, 2012.
[44] A. S.-T. Lue, *The Ganea map for nilpotent groups*, J. London Math. Soc. (2) 14 (1976), 309–312.
[45] P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Lecture Notes in Mathematics 271, Springer-Verlag, 1972.
[46] F. Patras, *Construction géométrique des idempotents eulériens. Filtration des groupes de polytopes et des groupes d'homologie de Hochschild*, Bull. Soc. Math. France 119 (1991), 173–198.
[47] T. Pirashvili, *Hodge decomposition for higher order Hochschild homology*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 33 (2000), 151–179.
[48] J. Stasheff, J. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces. I, II*. Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275–292 and 293–312.
[49] B. L. Tsygan, *Homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology*, Uspekhi Mat. Nauk 38 (1983), no. 2(230), 217–218 ; trad. anglaise dans Russian Math. Surveys 38 (1983), no. 2, 198–199.
[50] J. H. C. Whitehead, *On adding relations to homotopy groups*, Ann. Math. 42 (1941), 409–428.
[51] G. W. Zinbiel, *Encyclopedia of types of algebras 2010*, in « Operads and universal algebra (Tianjin, 2010) », World Scientific (2012), pp. 217–298.

7. Cursus professionnel de Jean-Louis Loday

Né le 12 janvier 1946

1965–69 : Élève à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm à Paris

1969–71 : Assistant à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg

1971–75 : Attaché de recherche du CNRS

1975 : Soutenance du Doctorat ès sciences (Doctorat d'État) à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg

1975–82 : Chargé de recherche du CNRS

1976–77 : Membre de l'Institute for Advanced Study de Princeton

1982–88 : Maître de recherche, puis directeur de recherche de 2^{e} classe du CNRS

1988–95 : Directeur de recherche de 1re classe du CNRS

1991–95 : Directeur de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg

1995–2011 : Directeur de recherche de classe exceptionnelle

1995–98 : Chargé de mission à la Mission Scientifique et Technique (DSPT1) du Ministère de l'Éducation Nationale

2012 : Directeur de recherche émérite

8. Liste des doctorants

(1) Christian Kassel, *Homologie du groupe linéaire général et K-théorie stable*, Doctorat ès sciences à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg en 1981 ; directeur de recherche du CNRS à l'Université de Strasbourg.

(2) Mohamed Ayadi, *L'homologie des algèbres de Lie*, Doctorat de l'Université Louis Pasteur en 1985.

(3) Francois Goichot, *Homologie cyclique : produits, généralisations*, Doctorat de l'Université Nancy 1 en 1986 ; maître de conférences à l'Université de Valenciennes.

(4) Daniel Guin, *Homologie du groupe linéaire et symboles en K-théorie algébrique*, Doctorat ès sciences à l'Université Louis Pasteur en 1987 ; professeur retraité de l'Université Montpellier 2.

(5) Rachida Aboughazi, *Groupes simpliciaux croisés. p-Algèbres de Lie. Produit tensoriel du groupe d'Heisenberg*, Doctorat de l'Université Louis Pasteur en 1987 ; *lecturer* à l'Université d'État de l'Ohio à Columbus.

(6) Randy McCarthy, *Cyclic homology of an exact category*, PhD de l'Université Cornell en 1990 (codirection avec D. Grayson et S. Lichtenbaum) ; professeur à l'Université de l'Illinois à Urbana-Champaign.

(7) Christian Cuvier, *Homologie des algèbres de Leibniz*, Doctorat de l'Université Louis Pasteur en 1991.

(8) Philippe Gaucher, *Opérations sur l'homologie d'algèbres de matrices et homologie cyclique*, Doctorat de l'Université Louis Pasteur en 1992 (codirection avec Daniel Guin) ; chargé de recherche du CNRS au Laboratoire PPS de l'Université Paris 7.

(9) Allahtan Gnedbaye, *Sur l'homologie des algèbres de Leibniz. Opérades des algèbres k-aires*, Doctorat de l'Université Louis Pasteur en 1995 ; coordinateur local du Réseau Africain en Géométrie et Algèbre Appliquées au Développement, Université de N'Djaména, Tchad.

(10) Benoit Fresse, *Cogroupes dans les algèbres sur une opérade*, Doctorat de l'Université Louis Pasteur en 1996 ; professeur à l'Université Lille 1.

(11) Alessandra Frabetti, *Coomologia delle dialgebre*, Doctorat de l'Université de Bologne en 1997 ; maître de conférences à l'Université Claude Bernard de Lyon.

(12) Muriel Livernet, *Homotopie rationnelle des algèbres sur une opérade*, Doctorat de l'Université Louis Pasteur en 1998 ; maître de conférences à l'Université Paris 13.

(13) Bruno Vallette, *Dualité de Koszul des PROPs*, Doctorat de l'Université Louis Pasteur en 2003 ; maître de conférences à l'Université de Nice.

(14) Mathieu Zimmermann, *Complexes de chaînes et petites catégories*, Doctorat de l'Université Louis Pasteur en 2004 ; enseignant de lycée.

(15) Emily Burgunder, *Bigèbres généralisées : de la conjecture de Kashiwara-Vergne aux complexes de graphes de Kontsevich*, Doctorat de l'Université Montpellier 2 en 2008 (codirection avec Alain Bruguières) ; maître de conférences à l'Université Paul Sabatier de Toulouse.