GRUPOS CUÁNTICOS

Christian Kassel

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur - C.N.R.S., 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

Abstract. *These notes provide a concise introduction to the theory of quantum groups from the point of view of braided tensor categories. They were written for a course given in 1994 during the XI^o Coloquio Latinoamericano de Álgebra in Mendoza, Argentine.*

Mathematics Subject Classification (1991): 16W30, 17B37, 18D10, 20F36, 81R50

Estas son las notas del curso que dí en Agosto de 1994 en el XI^o Coloquio Latinoamericano de Álgebra en Mendoza, Argentina. El objetivo de éste fue dar una introducción a la teoría de los grupos cuánticos desde el punto de vista de las categorías.

Los grupos cuánticos de los que hablamos son las llamadas "álgebras envolventes cuánticas" de Drinfeld-Jimbo. Estas son deformaciones formales de las álgebras envolventes de las álgebras de Lie semisimples. La definición de estas álgebras es bastante complicada; lo haremos solo en el caso más simple, cuando el álgebra de Lie es $\mathfrak{sl}(2)$. Las álgebras envolventes cuánticas tienen una propiedad común muy importante: sus categorías de módulos son categorías trenzadas. Este último concepto es el más estudiado en este curso. También consideraremos otras categorías trenzadas interesantes, que no son categorías de módulos, como las construídas con objetos 1-dimensionales en el plano.

El contenido de estas notas es el siguiente. Empezamos definiendo categorías trenzadas, ilustrando este concepto con dos tipos de ejemplos:

(i) el primer ejemplo serán categorías de módulos sobre ciertas álgebras, llamadas biálgebras trenzadas. Las álgebras envolventes cuánticas de Drinfeld-Jimbo son de este tipo.

(ii) construiremos la categoría trenzada $\mathcal{B}$ utilizando ciertos objetos 1-dimensionales en el plano, llamados trenzas. La categoría $\mathcal{B}$ es universal entre todas las categorías trenzadas.

Después haremos una construcción categórica del doble cuántico de Drinfeld. El método mostrado aquí es más conceptual y más fácil de entender que la construcción original de Drinfeld. Esto nos permitirá obtener la R-matriz universal para el álgebra envolvente cuántica de $\mathfrak{sl}(2)$.

En la Lección IV damos una versión infinitesimal del concepto de categoría trenzada, esto es, el concepto de una categoría infinitesimal simétrica. La categoría de módulos sobre un álgebra de Lie semisimple es un ejemplo de estas categorías. Existe una categoría simétrica infinitesimal universal $\mathcal{A}$, que también construiremos en estas notas.

Terminamos este curso mostrando cómo construir una categoría trenzada dada cualquier categoría infinitesimal simétrica. Por un importante teorema de Drinfeld, si aplicamos este método a la categoría de módulos sobre un álgebra de Lie semisimple, recuperamos la categoría de módulos sobre la correspondiente álgebra envolvente cuántica. Por otro lado, considerando la categoría $\mathcal{A}$ de la Lección IV, tenemos una representación universal del grupo de trenzas.

Mi cálido agradecimiento a Silvia Cécere, María Julia Redondo y Andrea Solotar quienes me ayudaron a escribir estas notas y las tradujeron al español.

El plan de este curso es el siguiente.

Lección I. Categorías tensoriales

I.1. Definición. Recordamos una definición clásica (ver [Mac71], [Kas95], Capítulo XI).

Definición 1. *Una categoría tensorial* $\mathcal{C}$ *es una categoría provista de un producto tensorial* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$*, esto es, dados objetos* V, W *de la categoría,* $V \otimes W$ *es un objeto de* $\mathcal{C}$*, y dados morfismos* $f : V \to V'$ *y* $g : W \to W'$*, se le asocia un morfismo* $f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$ *de* $\mathcal{C}$ *que verifica:*

(i) $\otimes$ *es asociativo en los objetos y en los morfismos,*

(ii) $\mathrm{id}_{V \otimes W} = \mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W$*,* V*,* W *de* $\mathcal{C}$*,*

(iii) Si V, V', V'', W, W', W'' *son objetos de* $\mathcal{C}$*, y* $f : V \to V'$*,* $g : W \to W'$*,* $f' : V' \to V''$*,* $g' : W' \to W''$ *son morfismos de* $\mathcal{C}$*, entonces*

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g),$$

(iv) Existe un objeto I *de* $\mathcal{C}$ *tal que* $I \otimes V = V \otimes I = V$*, para todo objeto* V*, y* $\mathrm{id}_V \otimes f = f \otimes \mathrm{id}_I = f$ *para todo morfismo* f *en* $\mathcal{C}$*.*

I.2. La categoría de los espacios vectoriales. Si k es un cuerpo, $\mathcal{C}$ la categoría de k-espacios vectoriales, $\otimes$ el producto tensorial usual, entonces $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial con $I = k$.

Sea G un grupo. Es claro que la subcategoría de espacios vectoriales con una acción a izquierda de G es también tensorial. El producto tensorial es el mismo que en el caso de los espacios vectoriales. Además, si V y W son G-módulos, entonces $V \otimes_k W$ es un G-módulo con la acción

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw \tag{1.1}$$

para todo $g \in G$, $v \in V$ y $w \in W$. El grupo actúa trivialmente en el espacio vectorial unidimensional k, es decir, $gv = v$ para todo $g \in G$ y $v \in k$.

I.3. Módulos sobre una biálgebra. La categoría de G-módulos es un caso particular de la categoría A-mod de módulos a izquierda sobre una k-álgebra A, asociativa y con unidad, tomando en este caso $A = k[G]$ el álgebra de grupo.

Ahora buscamos condiciones sobre la k-álgebra A que impliquen que A-mod es una subcategoría tensorial de la categoría de los espacios vectoriales. Si V, W son A-módulos, entonces $V \otimes_k W$ es un $A \otimes A$-módulo. Si existe un morfismo de k-álgebras $\Delta : A \to A \otimes A$, entonces $V \otimes_k W$ resulta un A-módulo definiendo para $a \in A$, $v \in V$ y $w \in W$

$$a(v \otimes w) = \Delta(a)(v \otimes w) = \sum_{(a)} a'v \otimes a''w \tag{1.2}$$

si $\Delta(a) = \sum_{(a)} a' \otimes a''$. Es fácil ver que para que se cumplan (i–iii) de la Definición 1, el morfismo Δ debe ser coasociativo, es decir que

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}_A)\Delta = (\mathrm{id}_A \otimes \Delta)\Delta. \tag{1.3}$$

Como objeto I hay que tomar al cuerpo k. Para que k sea un A-módulo, necesitamos un morfismo de k-álgebras $\varepsilon : A \to k$. Entonces k resulta un A-módulo definiendo para $a \in A$, $v \in k$

$$av = \varepsilon(a)v. \tag{1.4}$$

Tenemos tambien las relaciones

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_A)\Delta = (\mathrm{id}_A \otimes \varepsilon)\Delta = \mathrm{id}_A. \tag{1.5}$$

Una terna (A, Δ, ε) satisfaciendo Condiciones (1.3) y (1.5) se llama una *biálgebra*. Los morfismos Δ y ε son la *comultiplicación* y la *counidad* de la biálgebra A.

El álgebra de grupo $k[G]$ de I.2 es una biálgebra con comultiplicación y counidad dadas por

$$\Delta(g) = g \otimes g \quad \text{y} \quad \varepsilon(g) = 1 \tag{1.6}$$

para todo $g \in G$.

El álgebra envolvente $U(\mathfrak{g})$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es también una biálgebra, con comultiplicación y counidad dadas por

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x \quad \text{y} \quad \varepsilon(x) = 0 \tag{1.7}$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto, la categoría $U(\mathfrak{g})$-mod de $\mathfrak{g}$-módulos es también un subcategoría tensorial de la categoría de los espacios vectoriales.

En estos ejemplos se verifica que $\Delta = \Delta^{\mathrm{op}}$, donde $\Delta^{\mathrm{op}} = \sigma \circ \Delta$, y σ es la trasposición (12). En este caso, (A, Δ, ε) se llama una k-biálgebra *coconmutativa*. Veremos ahora un ejemplo de una biálgebra que no es conmutativa ni coconmutativa.

I.4. El álgebra envolvente cuántica de $\mathfrak{sl}(2)$. Los primeros ejemplos de biálgebras eran conmutativos o coconmutativos. Drinfeld y Jimbo [Dri87], [Jim85] construyeron ejemplos naturales de biálgebra no conmutativa ni coconmutativa, a partir de las álgebras de Lie semisimples $\mathfrak{g}$, que vamos a describir para el caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$.

Recordemos que

$$\mathfrak{sl}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C}) \;\middle|\; a + d = 0 \right\}$$

y está generada como álgebra por H, X, Y, donde

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con las relaciones

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H. \tag{1.8}$$

Llamamos $U_h(\mathfrak{sl}(2))$ a la $\mathbf{C}[[h]]$-álgebra generada por X, Y, H con las relaciones

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y \tag{1.9}$$

y

$$[X,Y] = \frac{\exp(hH/2) - \exp(-hH/2)}{\exp(h/2) - \exp(-h/2)} = \frac{\sinh(hH/2)}{\sinh(h/2)}. \tag{1.10}$$

La estructura de biálgebra está definida por la comultiplicación Δ y la counidad ε:

$$\Delta(H) = 1 \otimes H + H \otimes 1, \tag{1.11}$$

$$\Delta(X) = X \otimes \exp(hH/4) + \exp(-hH/4) \otimes X, \tag{1.12}$$

$$\Delta(Y) = Y \otimes \exp(hH/4) + \exp(-hH/4) \otimes Y, \tag{1.13}$$

$$\varepsilon(H) = \varepsilon(X) = \varepsilon(Y) = 0. \tag{1.14}$$

Es evidente que $U_h(\mathfrak{sl}(2))$ no es conmutativa ni coconmutativa. Además $[X,Y] \equiv H$ módulo h. Más generalmente, para $h = 0$ recuperamos el caso clásico, esto es,

$$U_h(\mathfrak{sl}(2))/hU_h(\mathfrak{sl}(2)) \cong U(\mathfrak{sl}(2)) \tag{1.15}$$

como biálgebras.

I.5. Una categoría de dibujos. En los ejemplos de categorías que hemos visto, nunca especificamos los morfismos porque era claro a quienes nos referíamos. Ahora describiremos una categoría $\mathcal{D}$ de naturaleza completamente diferente, para la cual la información esencial está en los morfismos, no en los objetos.

Los objetos de la categoría $\mathcal{D}$ son los números naturales. Un morfismo en $\mathcal{D}$ del objeto m en el objeto n es cualquier figura que uno quiera dibujar con las siguientes propiedades: la figura está en la banda horizontal $\mathbf{R} \times [0,1]$; tiene extremos, que son intervalos topológicos, que unen m puntos distintos de la recta $\mathbf{R} \times \{0\}$ con n puntos distintos de la recta $\mathbf{R} \times \{1\}$. Consideramos el conjunto de las figuras a menos de homeomorfismos, con los extremos fijos.

La composición en $\mathcal{D}$ está dada por: sean $f : m \to n$ y $g : n \to p$ morfimos en $\mathcal{D}$ representados por figuras D y D' respectivamente. Por definición, D tiene n extremos superiores y D' tiene la misma cantidad de extremos inferiores. La composición $g \circ f$ es la clase de homeomorfismo de la figura que se obtiene poniendo D' arriba de D, pegando los correspondientes extremos, y comprimiendo la figura resultante en la banda $\mathbf{R} \times [0,1]$. La identidad de un objeto $n > 0$ esta representada por la unión $\{1, \ldots, n\} \times [0,1]$ de intervalos. La identidad del objeto 0 es la figura vacía.

Afirmamos que $\mathcal{D}$ es una categoría tensorial. En los objetos, el producto tensorial está dado por la adición: $m \otimes n = m + n$. En los morfismos, se define así: sean $f : m \to n$ y $g : p \to q$ morfismos de $\mathcal{D}$ representados por figuras D y D' respectivamente. Definimos $f \otimes g$ como la clase de homeomorfismo de la figura obtenida poniendo D' a la derecha de D, de tal manera que ambas figuras sean disjuntas. El lector puede verificar que todos los axiomas de la Definición 1 se satisfacen. Es claro que 0 es el objeto unidad. Observar que su conjunto de endomorfimos es muy grande: es el conjunto de clases de homeomorfismo de todas las figuras en la banda abierta $\mathbf{R} \times]\,0,1[$.

La categoría $\mathcal{D}$ es anecdótica. Fue desarrollada para este curso, solo para considerar un ejemplo sencillo muy diferente a los usuales. De todos modos, en lo que sigue encontraremos otras dos categorías de figuras construídas en esta forma. Ambas serán muy importantes en la teoría de grupos cuánticos.

Lección II. Categorías trenzadas

II.1. Definición. El siguiente concepto es fundamental para este curso.

Definición 2. *Dada una categoría tensorial $\mathcal{C}$, un trenzado de $\mathcal{C}$ es una familia de isomorfismos*

$$c_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$$

para todos los objetos V, W de $\mathcal{C}$ tales que:

(i) Si $f : V \to V'$, $g : W \to W'$,

$$c_{V',W'} \circ (f \otimes g) = (g \otimes f) \circ c_{V,W}. \tag{2.1}$$

(ii) Los siguientes triángulos conmutan:

$$\begin{tikzcd} U \otimes V \otimes W \arrow[rr, "c_{U\otimes V,W}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_U \otimes c_{V,W}"'] & & W \otimes U \otimes V \\ & U \otimes W \otimes V \arrow[ur, "c_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V"'] & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

y

$$\begin{tikzcd} U \otimes V \otimes W \arrow[rr, "c_{U,V\otimes W}"] \arrow[dr, "c_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W"'] & & V \otimes W \otimes U \\ & V \otimes U \otimes W \arrow[ur, "\mathrm{id}_V \otimes c_{U,W}"'] & \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

para todos los objetos U, V, W. Una categoría tensorial $\mathcal{C}$ provista de un trenzado se dice una categoría trenzada.

Si $\mathcal{C}$ es la categoría de k-espacios vectoriales, y $c_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ es la trasposición $\sigma_{V,W}(v \otimes w) = w \otimes v$, la categoría $\mathcal{C}$ resulta una categoría trenzada.

II.2. La ecuación de Yang-Baxter.

Proposición 1. *En una categoría trenzada, el siguiente hexágono conmuta para todo objeto U, V, W:*

$$\begin{tikzcd} U \otimes V \otimes W \arrow[r, "c_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W"] \arrow[d, "\mathrm{id}_U \otimes c_{V,W}"'] & V \otimes U \otimes W \arrow[d, "\mathrm{id}_V \otimes c_{U,W}"] \\ U \otimes W \otimes V \arrow[d, "c_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V"'] & V \otimes W \otimes U \arrow[d, "c_{V,W} \otimes \mathrm{id}_U"] \\ W \otimes U \otimes V \arrow[r, "\mathrm{id}_W \otimes c_{U,V}"] & W \otimes V \otimes U \end{tikzcd}$$

Demostración.— Observar que si completamos el hexágono con las flechas $c_{U,V\otimes W}$ y $c_{U,W\otimes V}$, entonces los triángulos conmutan. Ahora basta ver que el rectángulo interior conmuta, y esto es inmediato a partir de la relación (2.1). □

Corolario 1. *Para todo objeto V en una categoría trenzada, el automorfismo $c = c_{V,V}$ de $V \otimes V$ satisface la ecuación de Yang-Baxter*

$$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c) \tag{2.4}$$

Los grupos cuánticos fueron construídos originariamente para encontrar soluciones a la ecuación de Yang-Baxter (ver [Dri87]).

II.3. Biálgebras trenzadas. Veamos cuándo resulta trenzada la categoría tensorial de A-módulos.

Proposición 2. *Sea (A, Δ, ε) una biálgebra y sea $\mathcal{C}$ la categoría tensorial de A-módulos. La categoría $\mathcal{C}$ es trenzada sí y sólo si existe $R \in A \otimes A$ tal que:*

(a) R es inversible en el álgebra $A \otimes A$,

(b) para todo $a \in A$

$$\Delta^{op}(a) = R\Delta(a)R^{-1}, \tag{2.5}$$

(c)

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = R_{13}R_{23} \quad y \quad (\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12} \tag{2.6}$$

donde $R_{12} = R\otimes 1$, $R_{23} = 1\otimes R$ y $R_{13} = \sum_{(R)} R^{(1)}\otimes 1\otimes R^{(2)}$ donde $R = \sum_{(R)} R^{(1)}\otimes R^{(2)}$.

Si A satisface las condiciones de la proposición 2, A se llamará una *biálgebra trenzada*. Drinfeld [Dri87], [Dri89] usaba la terminología "álgebra cuasitriangular". El elemento R se llama la *R-matriz universal* de A. Si A es *coconmutativa*, por ejemplo, $A = k[G]$ ó $A = U(\mathfrak{g})$, puede tomarse $R = 1 \otimes 1$ y el trenzado la trasposición σ.

Demostración.— $\Leftarrow$) Se define $c_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ a partir de la R-matriz universal por:

$$c_{V,W}(v \otimes w) = \sigma\big(R(v \otimes w)\big) = [R(v \otimes w)]_{21} \tag{2.7}$$

Es claro que $c_{V,W}$ es un isomorfismo que verifica (2.1), y para ver que los triángulos (2.2–2.3) conmutan, es suficiente usar la condición (2.6) de la proposición.

$\Rightarrow$) Sea $R = [c_{A,A}(1 \otimes 1)]_{21} \in A \otimes A$. Como $c_{A,A}$ es un isomorfismo, R es inversible. Observemos también que por la funtorialidad de c, dados $v \in V$ y $w \in W$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{c_{A,A}} & A \otimes A \\ {\scriptstyle \bar v\otimes \bar w}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \bar w\otimes \bar v} \\ V \otimes W & \xrightarrow{c_{V,W}} & W \otimes V \end{array}$$

donde $\bar v$ y $\bar w$ son las aplicaciones A-lineales $A \to V$ y $A \to W$ definidas por $\bar v(1) = v$ y $\bar w(1) = w$. Luego

$$\begin{aligned} c_{V,W}(v \otimes w) &= c_{V,W}\big((\bar v \otimes \bar w)(1 \otimes 1)\big) \\ &= (\bar w \otimes \bar v)\big(c_{A,A}(1 \otimes 1)\big) \\ &= R_{21}(w \otimes v) \\ &= [R(v \otimes w)]_{21}. \end{aligned}$$

Por la A-linealidad de $c_{V,W}$, sigue fácilmente que $\Delta^{op}(a)R = R\Delta(a)$ para todo $a \in A$. La condición (c) se verifica usando la conmutatividad de (2.2–2.3). □

II.4. El caso $U_h(\mathfrak{sl}(2))$. El objetivo de este párrafo es describir una subcategoría de $U_h(\mathfrak{sl}(2))$-módulos que es una categoría trenzada. Recordemos que $U(\mathfrak{sl}(2))$ es semisimple, es decir, todo $\mathfrak{sl}(2)$-módulo V de dimensión finita es suma directa de submódulos simples V_n con $\dim V_n = n+1$ y tales que la acción ρ de $\mathfrak{sl}(2)$ sobre V_n está dada en una base adecuada por

$$\rho(H) = \begin{pmatrix} n & & & & \\ & n-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -n+2 & \\ & & & & -n \end{pmatrix},$$

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} 0 & n & & & \\ 0 & 0 & n-1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho(Y) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & n & 0 \end{pmatrix}.$$

Cada $\mathfrak{sl}(2)$-módulo V_n puede ser deformado a un $U_h(\mathfrak{sl}(2))$-módulo $\widetilde{V}_n$ libre de rango $n+1$ sobre $\mathbf{C}[[h]]$ con la acción

$$\rho_h(H) = \begin{pmatrix} n & & & & \\ & n-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -n+2 & \\ & & & & -n \end{pmatrix},$$

$$\rho_h(X) = \begin{pmatrix} 0 & [n] & & & \\ 0 & 0 & [n-1] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [1] \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_h(Y) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ [1] & 0 & & & \\ 0 & [2] & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & [n] & 0 \end{pmatrix},$$

donde $[n] = \sinh(nh/2)/\sinh(h/2)$. Observar que $[n]$ tiende a n cuando h tiende a 0.

Consideremos la categoría $U_h(\mathfrak{sl}(2))$-mod$_f$ cuyos objetos son las sumas directas finitas de los módulos $\widetilde{V}_n$. Dado cualquier $\mathfrak{sl}(2)$-mod V de dimensión finita, notamos $\widetilde{V}$ al único objeto de $U_h(\mathfrak{sl}(2))$-mod$_f$ tal que $\widetilde{V}/h\widetilde{V} = V$ como $\mathfrak{sl}(2)$-módulo. La categoría $U_h(\mathfrak{sl}(2))$-mod$_f$ es tensorial, con producto tensorial dado por $\widetilde{V} \otimes \widetilde{W} = (V \otimes_k W)\widetilde{\ }$.

Teorema 1. *La categoría $U_h(\mathfrak{sl}(2))$-mod$_f$ está trenzada, con trenzado inducido por la R-matriz universal*

$$R_h = \sum_{\ell \geq 0} \frac{(q - q^{-1})^\ell}{[\ell]!} q^{-\ell(\ell+1)/2} \exp\left[\frac{h}{2}\left(\frac{H \otimes H}{2} + \frac{1}{2}(\ell H \otimes 1 - 1 \otimes \ell H)\right)\right] \left(X^\ell \otimes Y^\ell\right)$$

donde $q = \exp(h/2)$, $[\ell] = (q^\ell - q^{-\ell})/(q - q^{-1})$ y $[\ell]! = [1][2]\dots[\ell]$.

El lector puede intentar probar directamente que R_h satisface las condiciones de la Definición 2. Pero esto es difícil. En III.3 encontraremos otra expresión de R_h usando la construcción del doble cuántico.

II.5. Grupos de trenzas: definición algebraica. Ahora explicaremos por qué las categorías consideradas en esta lección se llaman trenzadas. Sea n un entero > 1.

Definición 3. *El grupo B_n es el grupo generado por $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, con las relaciones*

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad \text{si } \mid i - j \mid \geq 2 \quad \text{y} \quad \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$

para todos i, j. Un elemento de B_n es llamado una trenza con n hebras.

Agregando la relación $\sigma_i^2 = 1$ para todo i, se obtiene una presentación del grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$.

Ahora describiremos una relación que existe entre los grupos de trenzas y las categorías trenzadas. Si V es un objeto cualquiera de una categoría trenzada, entonces el grupo B_n actúa naturalmente sobre $V^{\otimes n}$, es decir, existe un morfismo de grupos

$$\rho_n : B_n \to \mathrm{Aut}(V^{\otimes n})$$

que en los generadores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ está dado por

$$\rho_n(\sigma_i) = \mathrm{id} \otimes \dots \otimes \underbrace{c_{V,V}}_{i,i+1} \otimes \dots \otimes \mathrm{id}. \tag{2.8}$$

Del Corolario 1 se deduce que esta fórmula define un morfismo de grupos en B_n.

II.6. Descripción topológica de las trenzas. Nosotros representamos una trenza con n hebras como la unión de n intervalos inmersos en $\mathbf{R} \times [0, 1]$ tales que

(i) los extremos de los intervalos son los puntos $(1, 0), \dots, (n, 0)$ y $(1, 1), \dots, (n, 1)$ del plano,

(ii) para todo $t \in [0, 1]$ salvo un número finito, la intersección de la recta $\mathbf{R} \times \{t\}$ con la trenza consiste en n puntos distintos. Más aún, suponemos que todas las singularidades de la inmersión son puntos dobles ordinarios. En cada punto doble, existe un orden de las hebras que pasan por allí, que significa que una de ellas pasa por encima de la otra, y esto lo representamos interrumpiendo el dibujo de la hebra que pasa por debajo en un entorno del punto doble.

Consideramos las trenzas a menos de homeomorfismos. Esto significa un homeomorfismo de $\mathbf{R} \times [0,1]$ que fija los extremos, que manda puntos dobles en puntos dobles, y que preserva el orden de las hebras en los puntos dobles.

El producto TT' de dos trenzas T y T' con n hebras se define como en la categoría $\mathcal{D}$ de la Lección I.5, esto es, poniendo T arriba de T', pegando los extremos y comprimiendo la trenza resultante dentro de $\mathbf{R} \times [0,1]$. Este producto tiene la unidad representada por la unión $\{1, \ldots, n\} \times [0,1]$ de intervalos.

Representamos el generador σ_k por la unión de los intervalos $\{i\} \times [0,1]$ para $1 \leq i \leq n$ y $i \neq k, k+1$ y los intervalos $[(k,0),(k+1,1)]$ y $[(k+1,0),(k,1)]$, donde el penúltimo intervalo pasa por encima del último intervalo.

II.7. La categoría trenzada universal. Consideremos la categoría $\mathcal{B}$ cuyos objetos son los números naturales, y tal que

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(n,m) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n \neq m, \\ B_n & \text{si } n = m, \end{cases}$$

donde B_n es el grupo de la Definición 3 y $B_0 = B_1 = \{1\}$. La composición la definimos por el producto en los grupos trenzados o, equivalentemente, como en la categoría $\mathcal{D}$ de I.5. La identidad id_n del objeto n es la unidad del grupo B_n. La categoría $\mathcal{B}$ es tensorial con producto tensorial definido en los objetos y en los morfismos como en el caso de $\mathcal{D}$.

Nosotros afirmamos que $\mathcal{B}$ es trenzada. Para todo par de objetos (n,m), definimos un morfismo $c_{n,m} : n \otimes m \to m \otimes n$ como el elemento de B_{n+m} definido con los generadores $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+m}$ por $c_{n,0} = c_{0,n} = \mathrm{id}_n$ y

$$c_{n,m} = (\sigma_m \sigma_{m-1} \ldots \sigma_1)(\sigma_{m+1}\sigma_m \ldots \sigma_2) \ldots (\sigma_{m+n-1}\sigma_{m+n-2} \ldots \sigma_n). \tag{2.9}$$

Proposición 3. *La familia de morfismos $(c_{n,m})_{n,m \geq 0}$ es un trenzado para la categoría tensorial $\mathcal{B}$.*

La demostración se deja al lector. La categoría $\mathcal{B}$ es la categoría trenzada universal, más precisamente:

Teorema 2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría trenzada y V un objeto de $\mathcal{C}$. Entonces existe un único funtor $F_V : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ tal que $F_V(0) = I$, $F_V(1) = V$,*

$$F_V(n \otimes m) = F_V(n) \otimes F_V(m), \quad F_V(T \otimes T') = F_V(T) \otimes F_V(T')$$

para todos los objetos n, m y todos los morfismos T, T' y

$$F_V(\sigma_1) = c_{V,V} \in \operatorname{Aut}(V \otimes V).$$

.

Demostración.— En los objetos, el funtor está definido por $F_V(n) = V^{\otimes n}$. En los morfismos T de B_n, está definido por $F_V(T) = \rho_n(T)$, donde ρ_n es la representación construída en II.5. □

Lección III. El doble cuántico

¿ Cómo obtener biálgebras trenzadas, es decir, biálgebras A tales que A-mod sea una categoría trenzada ? Existe un método creado por Drinfeld que asocia a toda biálgebra A otra biálgebra $D(A)$ que es trenzada. Esta construcción no es sencilla. Nosotros veremos una construcción categórica simple, que a cada categoría tensorial $\mathcal{C}$ le asocia una categoría trenzada $\mathcal{D}(\mathcal{C})$, de forma tal que $\mathcal{D}(A\text{-mod}) = D(A)\text{-mod}$. Luego aplicaremos este método para "re"-encontrar la expresión de R_h en $U_h(\mathfrak{sl}(2))$.

III.1. Definición. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ una categoría tensorial. Definimos una nueva categoría $\mathcal{D}(\mathcal{C})$, llamada el *doble cuántico* de $\mathcal{C}$, como sigue. Los objetos de $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ son pares $(V, c_{X,V})$, donde V es un objeto de $\mathcal{C}$, y $c_{X,V} : X \otimes V \to V \otimes X$ es una familia de isomorfismos tales que

$$c_{Y,V}(f \otimes \mathrm{id}_V) = (\mathrm{id} \otimes f)\, c_{X,V} \tag{3.1}$$

y

$$c_{X\otimes Y,V} = (c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X \otimes c_{Y,V}) \tag{3.2}$$

para todo par (X, Y) de objetos y todo morfismo $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$.

Un morfismo de $(V, c_{X,V})$ en $(W, c_{X,W})$ en $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ es un morfismo $f : V \to W$ de $\mathcal{C}$ tal que

$$(f \otimes \mathrm{id}_X)\, c_{X,V} = c_{X,W}\, (\mathrm{id}_X \otimes f) \tag{3.3}$$

para todo objeto X en $\mathcal{C}$.

Se tiene entonces el siguiente:

Teorema 3. *La categoría $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ es una categoría trenzada tal que*

(i) el producto tensorial de dos objetos está dado por

$$(V, c_{X,V}) \otimes (W, c_{X,W}) = (V \otimes W, c_{X,V\otimes W})$$

donde $c_{X,V\otimes W} = (\mathrm{id}_V \otimes c_{X,W})(c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_W)$,

(ii) la unidad es (I, id),

(iii) el trenzado $(V, c_{X,V}) \otimes (W, c_{X,W}) \to (W, c_{X,W}) \otimes (V, c_{X,V})$ *está dado por* $c_{V,W}$.

Demostración.— Hace falta ver que (i) $(V, c_{X,V})\otimes(W, c_{X,W})$ es un objeto de la categoría, (ii) si f y g son morfismos en la categoría, entonces $f\otimes g$ también, (iii) $c_{V,W}$ es un morfismo en $\mathcal{D}(\mathcal{C})$, (iv) $c_{V,W}$ es un trenzado. Todo esto se verifica fácilmente. □

III.2. Aplicación a la categoría de A-módulos. Dada una biálgebra (A, Δ, ε), se quiere describir la categoría $\mathcal{D}(A\text{-mod})$ en términos de A. Para hacer esto, necesitamos la siguiente definición.

Definición 4. *Dada una biálgebra (A, Δ, ε), un A-bimódulo cruzado es un A-módulo a izquierda V con una aplicación lineal $\Delta_V : V \to V \otimes A$ tal que*

(i) se tiene

$$(\Delta_V \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta_V = (\mathrm{id}_V \otimes \Delta) \circ \Delta_V, \tag{3.4}$$

$$(\mathrm{id}_V \otimes \varepsilon) \circ \Delta_V = \mathrm{id}_V, \tag{3.5}$$

(ii) para todo $a \in A$ y $v \in V$ tenemos

$$\sum_{(a)} \sum_{(v)} a' v_V \otimes a'' v_A = \sum_{(a)} \sum_{(v)} (a'' v)_V \otimes (a'' v)_A \, a' \tag{3.6}$$

donde $\Delta(a) = \sum_{(a)} a \otimes a$ y $\Delta_V(v) = \sum_{(v)} v_V \otimes v_A$.

Teorema 4. *La categoría $\mathcal{D}(A\text{-mod})$ es equivalente a la categoría de los A-bimódulos cruzados.*

Demostración.— De todo A-bimódulo cruzado V obtenemos un elemento $(V, c_{X,V})$ de $\mathcal{D}(A\text{-mod})$ definido por

$$c_{X,V}(x \otimes v) = \Delta_V(1 \otimes x) = \sum_{(v)} v_V \otimes v_A \, x. \tag{3.7}$$

Uno puede verificar que $c_{X,V}$ satisface los axiomas que definen un objeto de $\mathcal{D}(A\text{-mod})$.

Recíprocamente, sea $(V, c_{X,V})$ un objeto de $\mathcal{D}(A\text{-mod})$. Definimos una aplicación lineal $\Delta_V : V \to V \otimes A$ por

$$\Delta_V(v) = c_{A,V}(1 \otimes v)$$

para todo $v \in V$. La naturalidad (3.1) de $c_{X,V}$ en X implica que se puede recuperar de Δ_V como en la ecuación (3.7). La relación (3.2) para $X = Y = A$ implica (3.4). La A-linealidad de $c_{A,V}$ implica (3.6). □

De los Teoremas 3–4 se deduce que la categoría de los A-bimódulos cruzados es trenzada. El trenzado entre dos A-bimódulos cruzados está dado por (3.7).

III.3. Bimódulos cruzados en el caso $\mathfrak{sl}(2)$. Apliquemos ahora el Teorema 4 a una sub-biálgebra de $U_h(\mathfrak{sl}(2))$. La idea de Drinfeld para encontrar la R-matriz universal R_h, fue construir $D(A)$ que es una biálgebra trenzada, y por lo tanto, tiene una R-matriz universal $\widehat{R}$, que se aplica en R_h mediante una suryección.

Recordemos que $U_h(\mathfrak{sl}(2))$ es el álgebra generada por X, H, Y con las relaciones (1.9–1.10). Sea B_h la subálgebra de $U_h(\mathfrak{sl}(2))$ generada por H, X. Sea $E = Xe^{hH/4}$. Tenemos que $[H, E] = 2E$. De (1.11–1.14) se deduce que B_h es una sub-biálgebra de $U_h(\mathfrak{sl}(2))$. A ella le queremos aplicar el Teorema 4.

Sea V un B_h-módulo. Determinemos cuándo es un bimódulo cruzado. Si lo es, existe una aplicación lineal Δ_V que satisface las condiciones de la Definición 4. Como $\{H^m E^n\}_{m,n\geq 0}$ es una base topológica de B_h, la aplicación Δ_V es de la forma

$$\Delta_V = \sum_{m,n\geq 0} \Delta^{m,n} \otimes H^m E^n \tag{3.8}$$

donde $(\Delta^{m,n})_{m,n\geq 0}$ es una familia de endomorfismos de V.

La relación (3.4) nos permite expresar el producto de dos elementos de esta familia como una combinación lineal de los elementos de la familia. Una inducción sencilla muestra que

$$\Delta^{m,n} = \frac{q^{n(n-1)/2}}{m![n]!}\, \Delta_1^m \Delta_2^n \tag{3.9}$$

para todo m, n, donde $\Delta_1 = \Delta^{1,0}$ y $\Delta_2 = \Delta^{0,1}$. La relación (3.5) implica que $\Delta^{0,0} = \mathrm{id}_V$.

La relación (3.6) implica relaciones entre la familia $(\Delta^{m,n})_{m,n}$ y los operadores H y E en V. Más precisamente, uno puede probar que V es un B_h-módulo cruzado sí y sólo si tiene cuatro endomorfismos H, E, Δ_1, Δ_2 actuando sobre él, tales que sus conmutadores están dados por

$$[H, E] = 2E, \qquad [\Delta_1, \Delta_2] = -\frac{h}{2}\Delta_2, \tag{3.10}$$

$$[H, \Delta_1] = 0, \qquad [H, \Delta_2] = -2\Delta_2, \tag{3.11}$$

$$[E, \Delta_1] = -\frac{h}{2}E, \qquad [E, \Delta_2] = \exp(hH/2) - \exp(2\Delta_1). \tag{3.12}$$

En otras palabras, un B_h-bimódulo cruzado es lo mismo que un módulo sobre el álgebra D_h generado por cuatro generadores H, E, Δ_1, Δ_2 y las relaciones (3.10–3.12).

Como la categoría de B_h-bimódulos cruzados es trenzada (Teoremas 3–4), el álgebra D_h debe ser trenzada (Proposición 2). Por (2.7), (3.7) y (3.8) su R-matriz universal tiene que ser

$$\widehat{R} = \sum_{m,n\geq 0} H^m E^n \otimes \Delta^{m,n}.$$

Combinando esto con (3.9), tenemos que

$$\widehat{R} = \sum_{m,n\geq 0} \frac{q^{n(n-1)/2}}{m![n]!}\, H^m E^n \otimes \Delta_1^m \Delta_2^n. \tag{3.13}$$

El próximo lema relaciona a la biálgebra trenzada D_h con el álgebra envolvente cuántica $U_h(\mathfrak{sl}(2))$.

Lema 1. *Existe un morfismo sobreyectivo de biálgebras* $\chi : D_h \to U_h(\mathfrak{sl}(2))$ *dado por*

$$\chi(E) = X\exp(hH/4), \quad \chi(H) = H,$$

$$\chi(\Delta_1) = \frac{h}{4}H, \quad \chi(\Delta_2) = (\exp(h/4) - \exp(-3h/4))\,Y.$$

Esto implica que, como D_h es trenzada con la R-matriz universal $\widehat{R}$, entonces $U_h(\mathfrak{sl}(2))$ es trenzada con la R-matriz universal $(\chi \otimes \chi)(\widehat{R})$. Tenemos

$$(\chi \otimes \chi)(\widehat{R}) = \sum_{m,n \geq 0} \frac{q^{n(n-1)/2}}{m![n]!} \chi(H)^m \chi(E)^n \otimes \chi(\Delta_1)^m \chi(\Delta_2^n). \tag{3.14}$$

Un cálculo rápido muestra que el lado derecho de (3.14) es igual a la expresión dada por R_h en el Teorema 1, y esto prueba lo último.

Lección IV. Trenzados infinitesimales

IV.1. Definición. Como hemos visto en el caso de $\mathfrak{sl}(2)$, la categoría de módulos sobre un álgebra envolvente cuántica depende de un parámetro h. Por ejemplo, el trenzado $c_{V,W}$ se puede extender a una serie formal en h:

$$c_{V,W} = \sigma_{V,W} \left(\mathrm{id}_{V \otimes W} + h \, r_{V,W} + \cdots \right) \tag{4.1}$$

donde $\sigma_{V,W}$ es la trasposición y $r_{V,W}$ es un endomorfismo de $V \otimes W$. Estudiemos el término lineal $r_{V,W}$. Como $c_{V,W}$ satisface los axiomas (2.1–2.3), éstos se traducen en condiciones sobre $r_{V,W}$.

Sea $\mathcal{S}$ una *categoría simétrica*, es decir, una categoría trenzada cuyo trenzado σ satisface la condición adicional

$$\sigma_{W,V} \circ \sigma_{V,W} = \mathrm{id}_{V \otimes W} \tag{4.2}$$

para todo objeto V, W de $\mathcal{S}$. Estos trenzados se llamarán *simetrías*. Además suponemos que $\mathcal{S}$ es $\mathbf{C}$-lineal, que significa que todos sus conjuntos de morfismos son espacios vectoriales complejos, y la composición y el producto tensorial de morfismos es $\mathbf{C}$-bilineal.

Definición 5. *Sea $\mathcal{S}$ una categoría simétrica y $\mathbf{C}$-lineal. Un trenzado infinitesimal de $\mathcal{S}$ es una familia de endomorfismos $t_{V,W} \in \mathrm{End}(V \otimes W)$ definida para todo objeto V, W tal que:*

$$(f \otimes g) \, t_{V,W} = t_{V',W'} \, (f \otimes g) \tag{4.3}$$

$$\sigma_{V,W} \circ t_{V,W} = t_{W,V} \circ \sigma_{V,W}, \tag{4.4}$$

$$t_{U,V \otimes W} = t_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W + (\sigma_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W)^{-1} (\mathrm{id}_V \otimes t_{U,W}) (\sigma_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W) \tag{4.5}$$

para todo objeto U, V, W y todo morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(V, V')$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(W, W')$.

Si $\mathcal{S}$ tiene un trenzado infinitesimal se llamará una categoría simétrica infinitesimal.

Si $t_{V,W}$ se define como en (4.1) por

$$t_{V,W} = r_{V,W} + \sigma_{V,W}^{-1} \, r_{W,V} \, \sigma_{V,W}$$

entonces $t_{V,W}$ satisface (4.3–4.5).

IV.2. Trenzados infinitesimales sobre categorías de módulos. Como en II.3, buscamos álgebras A cuya categoría de módulos sea simétrica infinitesimal. Sea (A, Δ, ε) una biálgebra *coconmutativa*. Sabemos por II.3 que la categoría de A-módulos es trenzada, con trenzado dado por la trasposición, que obviamente, es una simetría. El próximo resultado clasifica todos los trenzados infinitesimales en esta categoría.

Proposición 4. *Sea (A, Δ, ε) una biálgebra coconmutativa, y sea $\mathcal{S}$ la categoría de A-módulos con σ la trasposición. Entonces $\mathcal{S}$ es una categoría simétrica infinitesimal sí y sólo si existe $t \in A \otimes A$ tal que:*

(i) $[\Delta(a), t] = 0$ para todo $a \in A$,

(ii) t es un tensor simétrico y,

(iii) t pertenece a $\mathrm{Prim}(A) \otimes \mathrm{Prim}(A)$ donde $\mathrm{Prim}(A)$ es el conjunto de elementos $a \in A$ tales que $\Delta(a) = 1 \otimes a + a \otimes 1$.

Demostración.— $\Leftarrow$) Si $v, w \in \mathcal{S}$, sea $t_{V,W} \in \mathrm{End}(V \otimes W)$ definido por:

$$t_{V,W}(v \otimes w) = t(v \otimes w) = \sum_i x_i v \otimes y_i w \tag{4.6}$$

donde $t = \sum_i x_i \otimes y_i$. Es fácil verificar que las condiciones (i–iii) implican (4.3–4.5).

$\Rightarrow$) Sea $t = \sum_i x_i \otimes y_i \in A \otimes A$ definido por $t = t_{A,A}(1 \otimes 1)$. Veamos que se verifican (i–iii). La condición (i) se verifica porque $t_{A,A}$ es A-lineal. La condición (ii) es clara.

Probemos la condición (iii). Si aplicamos ambos lados de (4.5) al elemento $1 \otimes 1 \otimes 1$, con $U = V = W = A$, tenemos

$$\sum_i x_i \otimes \Delta(y_i) = \sum_i x_i \otimes (y_i \otimes 1 + 1 \otimes y_i).$$

Podemos suponer que los elementos x_i son linealmente independientes. Entonces tenemos $\Delta(y_i) = y_i \otimes 1 + 1 \otimes y_i$, es decir, todos los elementos y_i pertenecen a $\mathrm{Prim}(A)$. Por lo tanto, t pertenece a $A \otimes \mathrm{Prim}(A)$. Terminamos la demostración usando la simetría de t. □

Podemos aplicar la Proposición 4 al caso en que A sea el álgebra envolvente de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un cuerpo de característica cero. Entonces los trenzados infinitesimales de la categoría simétrica de $\mathfrak{g}$-módulos están en biyección con 2-tensores $\in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ que son simétricos e invariantes bajo la representación adjunta.

Consideremos el caso especial de un álgebra de Lie compleja semisimple $\mathfrak{g}$. Sea $\{x_i\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{g}$ con respecto a la forma de Killing $< x, y >= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y))$. Es bien sabido que el 2-tensor $t = \sum x_i \otimes x_i$ es simétrico e invariante. Entonces la categoría de $\mathfrak{g}$-módulos es una categoría simétrica infinitesimal con la trasposición como simetría y con trenzado infinitesimal inducido por la acción de t.

IV.3. Un ejemplo gráfico. El resto de esta Lección está dedicado a desarrollar un ejemplo gráfico de una categoría simétrica infinitesimal. Empezamos con algunas notaciones. Para todo entero $n \geq 2$, sea $\mathfrak{p}_n$ el álgebra de Lie compleja generada por los generadores $(t^{ij})_{1 \leq i \neq j \leq n}$ y las relaciones

$$t^{ij} = t^{ji}, \tag{4.7}$$

$$[t^{ij}, t^{ik} + t^{jk}] = 0, \tag{4.8}$$

$$[t^{ij}, t^{k\ell}] = 0 \tag{4.9}$$

para índices distintos i, j, k, ℓ. Llamamos $U(\mathfrak{p}_n)$ a su álgebra envolvente. El grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ actúa sobre $U(\mathfrak{p}_n)$ por la regla $\sigma \cdot t^{ij} = t^{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)}$ donde $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Podemos considerar el producto cruzado A_n de $\mathfrak{S}_n$ por $U(\mathfrak{p}_n)$. Recordemos que A_n es un álgebra cuyo espacio vectorial subyacente es el mismo que el del álgebra de grupo $U(\mathfrak{p}_n)[\mathfrak{S}_n]$, pero la multiplicación esta determinada por la regla

$$\sigma\, t^{ij} = (\sigma \cdot t^{ij})\, \sigma \tag{4.10}$$

para todo $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Además $A_0 = A_1 = \mathbf{C}$.

Ahora consideremos la categoría $\mathcal{A}$ cuyos objetos son los números naturales, y tal que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(n, m) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n \neq m, \\ A_n & \text{si } n = m. \end{cases}$$

La composición está definida por el producto en el álgebra A_n. La identidad id_n es la unidad de A_n.

Para darle a la categoría $\mathcal{A}$ una estructura de categoría infinitesimal simétrica, daremos primero una descripción gráfica de sus elementos. Como en el caso de las trenzas, estarán representados por figuras consideradas a menos de homeomorfismos en la banda $\mathbf{R} \times [0, 1]$. Estas figuras estarán llamadas *diagramas de cuerdas*. El diagrama de cuerdas del producto de dos elementos se obtiene, como en el caso de las trenzas, pegando el diagrama de cuerdas de un elemento arriba del diagrama de cuerdas del otro elemento.

Para representar gráficamente los elementos de A_n es suficiente representar a sus generadores. El álgebra A_n tiene dos tipos de generadores: los generadores t^{ij} de $\mathfrak{p}_n$ y las trasposiciones $s_k = (k, k+1)$ del grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$.

Representemos al generador t^{ij} por n intervalos verticales paralelos con una línea punteada horizontal entre el i-ésimo y el j-ésimo intervalo. Una línea punteada horizontal se llama una *cuerda*. Representemos la trasposición s_k por la unión de los intervalos $\{i\} \times [0, 1]$ para $1 \leq i \leq n$ y $i \neq k, k+1$ y los intervalos $[(k, 0), (k+1, 1)]$ y $[(k+1, 0), (k, 1)]$ de $\mathbf{R} \times [0, 1]$. En el grupo simétrico σ_k es igual a su inverso. Esto significa que, contrariamente a lo que sucede con las trenzas, aquí no hay diferencia entre cruzar por adelante o por atrás. Observar que s_k está representada por un diagrama de cuerdas sin cuerdas. Dejamos al lector que agregue las relaciones que resultan de las Relaciones (4.8–4.10). La relación entre los diagramas de cuerdas correspondientes a (4.8) es conocida en la teoría de invariantes de grado finito de nudos bajo la terminología "relación de cuatro términos" (para más información, ver [BN92] y [Kas95], Capítulo XX).

Con esta representación gráfica, es fácil dar una estructura tensorial a la categoría $\mathcal{A}$. Esto está hecho, así como hicimos para las categorías $\mathcal{D}$ en I.5 y $\mathcal{B}$ en II.7. La fórmula (2.9) define una simetría en $\mathcal{A}$.

Ahora construiremos un trenzado infinitesimal. Para todo objeto n, $m \geq 1$, definimos un endomorfismo $t_{n,m}$ del objeto $n \otimes m$ como el elemento

$$t_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} t^{i,j+n} \in A_{n+m}. \tag{4.11}$$

Si n ó $m = 0$, tenemos $t_{n,m} = 0$. Dejamos como ejercicio la demostración del próximo resultado (sugerencia: la relación (4.8) se usa para probar la naturalidad (4.3) de $t_{n,m}$).

Proposición 5. *La familia de endomorfismos $(t_{n,m})_{n,m \geq 0}$ es un trenzado infinitesimal de la categoría $\mathcal{A}$.*

La categoría $\mathcal{A}$ tiene la siguiente propiedad universal.

Teorema 5. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría simétrica infinitesimal $\mathbf{C}$-lineal con simetría σ y trenzado infinitesimal t. Dado un objeto V de $\mathcal{S}$, existe un único funtor $G_V : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ tal que $G_V(0) = I$, $G_V(1) = V$,*

$$G_V(n \otimes m) = G_V(n) \otimes G_V(m), \quad G_V(D \otimes D') = G_V(D) \otimes G_V(D')$$

para todos objetos n, m y todos morfismos D, D', y

$$G_V(s_1) = \sigma_{V,V} \in \mathrm{Aut}(V \otimes V) \quad y \quad G_V(t^{12}) = t_{V,V} \in \mathrm{End}(V \otimes V).$$

Lección V. Integración de categorías simétricas infinitesimales

A partir de una categoría simétrica infinitesimal $\mathcal{S}$, construímos una categoría trenzada $\mathcal{S}[[h]]$. Como veremos más adelante, esto tiene consecuencias muy importantes, gracias a un resultado fundamental de Drinfeld.

V.1. Categorías trenzadas revisadas. Antes de comenzar a construir $\mathcal{S}[[h]]$, necesitamos extender el concepto de categoría trenzada. Empezamos ampliando la condición (i) de la Definición 1 suponiendo la existencia de una *isomorfismo de asociatividad* natural

$$a : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$$

definido para toda terna U, V, W de objetos de la categoría $\mathcal{C}$ (cuando a es la identidad, recuperamos la Definición 1). En esta nueva situación, tenemos muchas elecciones de colocar los paréntesis en el producto tensorial de n objetos. Todas ellas son isomorfas. Por ejemplo, tomemos cuatro objetos U, V, W, Z. Hay cinco formas de colocar paréntesis en $U \otimes V \otimes W \otimes Z$. El siguiente diagrama, a menudo llamado el pentágono de Mac Lane, muestra dos formas de pasar de $((U \otimes V) \otimes W) \otimes Z$ a $U \otimes (V \otimes (W \otimes Z))$ usando el isomorfismo de asociatividad a.

$$\begin{tikzcd}
\big((U \otimes V) \otimes W\big) \otimes Z \arrow[rr, "a_{U \otimes V, W, Z}"] \arrow[d, "a_{U,V,W} \otimes \mathrm{id}_Z"'] & & (U \otimes V) \otimes (W \otimes Z) \arrow[d, "a_{U,V,W \otimes Z}"] \\
\big(U \otimes (V \otimes W)\big) \otimes Z \arrow[dr, "a_{U, V \otimes W, Z}"'] & & U \otimes \big(V \otimes (W \otimes Z)\big) \\
& U \otimes \big((V \otimes W) \otimes Z\big) \arrow[ur, "\mathrm{id}_U \otimes a_{V,W,Z}"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.1}$$

Nosotros supondremos que dados cuatro objetos cualesquiera, el pentágono de Mac Lane conmuta. Esto significa que entre dos formas de colocar los paréntesis en el producto tensorial de cuatro objetos, existe un único isomorfismo natural expresado con el isomorfismo de asociatividad. Mac Lane probó que la conmutatividad del pentágono también implica que existe un único isomorfismo natural, expresado con el isomorfismo de asociatividad, entre dos formas de colocar los paréntesis en el producto tensorial de n objetos, donde n es un entero positivo arbitrario (ver [Mac71]).

También tenemos que tener en cuenta al isomorfismo de asociatividad a en la definición del trenzado c. Esto significa que debemos reemplazar los dos triángulos conmutativos (2.2–2.3) de la Definición 2 por dos hexágonos conmutativos. El primer hexágono es

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes V) \otimes W \arrow[rr, "c_{U\otimes V,W}"] \arrow[d, "a_{U,V,W}"'] & & W \otimes (U \otimes V) \\
U \otimes (V \otimes W) \arrow[d, "\mathrm{id}_U \otimes c_{V,W}"'] & & (W \otimes U) \otimes V \arrow[u, "a_{W,U,V}"'] \\
U \otimes (W \otimes V) \arrow[rr, "a^{-1}_{U,W,V}"] & & (U \otimes W) \otimes V \arrow[u, "c_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V"']
\end{tikzcd} \tag{5.2}$$

El segundo hexágono se obtiene a partir del primero, reemplazando el isomorfismo c por su inverso c^{-1}.

V.2. Series de Drinfeld. Una serie formal $\Phi(A, B)$ en dos variables A, B que no conmutan se llama una *serie de Drinfeld* si $\Phi(A, B)$ es solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\Phi(0,0) &= 1, \\
\Phi(t_{12}, t_{23} + t_{24})\, \Phi(t_{13} + t_{23}, t_{34}) &= \Phi(t_{23}, t_{34})\, \Phi(t_{12} + t_{13}, t_{24} + t_{34})\, \Phi(t_{12}, t_{23}), \\
\exp(\frac{t_{13} + t_{23}}{2}) &= \Phi(t_{13}, t_{12})\, \exp(\frac{t_{13}}{2})\, \Phi(t_{13}, t_{23})^{-1}\, \exp(\frac{t_{23}}{2})\, \Phi(t_{12}, t_{23}), \\
\exp(\frac{t_{13} + t_{12}}{2}) &= \Phi(t_{23}, t_{13})^{-1}\, \exp(\frac{t_{13}}{2})\, \Phi(t_{12}, t_{13})\, \exp(\frac{t_{12}}{2})\, \Phi(t_{12}, t_{23})^{-1},
\end{aligned}$$

donde $(t_{ij})_{1\leq i\neq j\leq 4}$ verifica las relaciones (4.7–4.9). Observar que $\Phi(A, B) = 1$ no es una serie de Drinfeld. En realidad,

$$\exp(\frac{t_{13} + t_{23}}{2}) \neq \exp(\frac{t_{13}}{2}) \exp(\frac{t_{23}}{2})$$

porque t_{13} y t_{23} no conmutan. De todos modos, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6. *Existen series de Drinfeld.*

Drinfeld [Dri89], [Dri90] probó este teorema exhibiendo una solución particular Φ_{KZ} de la siguiente manera. Consideremos la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dG(z)}{dz} = \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} \right) G(z) \tag{5.3}$$

definida para $z \in \mathbf{C}\backslash\{0,1\}$, donde A, B son operadores que no conmutan. La ecuación (5.3) tiene singularidades regulares en 0, 1, ∞. Sea $G(z)$ alguna solución. No está definida en 0, 1, pero su comportamiento asintótico en estos puntos es bien conocido. Escribamos

$$G(z) = z^{hA/2i\pi}\,(1-z)^{hB/2i\pi}\,V(z).$$

La función $V(z)$ está definida en un entorno de $[0,1]$. Drinfeld probó que $\Phi_{\mathrm{KZ}} = V(1)V(0)^{-1}$ es una serie de Drinfeld. En realidad, es la única solución conocida hasta hoy. Podemos resolver (5.3) usando el método de aproximación de Picard. Por ejemplo, podemos calcular los primeros términos de Φ_{KZ}:

$$\Phi_{\mathrm{KZ}}(A,B) = 1 + \frac{1}{24}\,[A,B] + \frac{\zeta(3)}{(2i\pi)^3}\,\big([[A,B],B] - [A,[A,B]]\big) + \cdots . \tag{5.4}$$

Aquí $\zeta(3)$ es el valor de la función zeta de Riemann en el entero 3. La serie de Drinfeld Φ_{KZ} fue encontrada por Drinfeld en relación con las ecuaciones de Knizhnik-Zamolodchikov (para más información, ver [Dri89], [Dri90], [Kas95], Capítulo XIX).

V.3. La construcción de Drinfeld-Cartier. Ahora estamos listos para definir $\mathcal{S}[[h]]$ cuando $\mathcal{S}$ es una categoría simétrica infinitesimal $\mathbf{C}$-lineal. Seguiremos [Dri90] y [Car93].

Los objetos de $\mathcal{S}[[h]]$ son los mismos que los objetos de $\mathcal{S}$. Un morfismo en $\mathcal{S}[[h]]$ de V en W es una serie formal $\sum_{n\geq 0} f_n h^n$, donde $f_n \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(V,W)$ para todo n. La composición está definida usando la composición en $\mathcal{S}$ y la multiplicación usual de las series formales. La identidad de un objeto V en $\mathcal{S}[[h]]$ es la serie formal constante $\sum_{n\geq 0} f_n h^n$ donde $f_0 = \mathrm{id}_V$ y $f_n = 0$ cuando $n > 0$.

La categoría $\mathcal{S}[[h]]$ tiene un producto tensorial obtenido extendiendo $\mathbf{C}[[h]]$-linealmente al producto tensorial de $\mathcal{S}$.

Ahora le daremos a $\mathcal{S}[[h]]$ una estructura de categoría trenzada en el sentido ampliado de V.1. Para hacer esto, definimos un isomorfismo de asociatividad y un trenzado. Ambos estarán definidos como series formales. Para el isomorfismo de asociatividad, necesitamos elegir una serie de Drinfeld Φ como está definida en V.2. Sean

$$a_{U,V,W} = \Phi(h\,t_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W, h\,\mathrm{id}_U \otimes t_{V,W}) \tag{5.5}$$

donde $t_{U,V}$, $t_{V,W}$ son los trenzados infinitesimales de la categoría $\mathcal{S}$. El trenzado está definido por

$$c_{V,W} = \sigma_{V,W} \circ \exp(h\,t_{V,W}/2) \tag{5.6}$$

donde $\sigma_{V,W}$ es la simetría en $\mathcal{S}$.

Es fácil verificar que las ecuaciones que definen una serie de Drinfeld implican la conmutatividad del pentágono (5.1) y de los hexágonos (5.2). Como la categoría trenzada que acabamos de construir depende de una serie de Drinfeld Φ, hacemos notar esto llamando a la categoría trenzada $\mathcal{S}_\Phi[[h]]$.

V.4. El teorema fundamental de Drinfeld. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple compleja. Como mencionamos anteriormente, Drinfeld y Jimbo construyeron una $\mathbf{C}[[h]]$-biálgebra trenzada $U_h(\mathfrak{g})$ tal que

$$U_h(\mathfrak{g})/hU_h(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g})$$

como biálgebras. Podemos considerar la categoría $U_h(\mathfrak{g})\text{-mod}_f$ de $U_h(\mathfrak{g})$-módulos que son libres de rango finito como $\mathbf{C}[[h]]$-módulos. Esta categoría es trenzada.

Por otro lado, por IV.2 sabemos que la categoría $U(\mathfrak{g})\text{-mod}_f$ de $\mathfrak{g}$-módulos de dimensión finita es simétrica infinitesimal cuando la equipamos con la trasposición como simetría y con el trenzado infinitesimal inducido por el 2-tensor $t = \sum_i x_i \otimes x_i$ que es dual a la forma de Killing. Podemos aplicar el procedimiento de integración de V.3 a $U(\mathfrak{g})\text{-mod}_f$.

Drinfeld ([Dri89], [Dri90]) probó el siguiente resultado, que muestra la importancia del procedimiento de integración del párrafo anterior. Esta es una interpretación categórica de la demostración dada por Drinfeld de un teorema de Kohno sobre la monodromía de ecuaciones de Knizhnik-Zamolodchikov.

Teorema 7. *Para toda serie de Drinfeld Φ, las categorías trenzadas $U_h(\mathfrak{g})\text{-mod}_f$ y $(U(\mathfrak{g})\text{-mod}_f)_\Phi\,[[h]]$ son equivalentes.*

V.5. Una representación universal del grupo de trenzas. Volvamos a la categoría simétrica infinitesimal universal $\mathcal{A}$ construída en IV.3. Fijemos una serie de Drinfeld Φ. Por V.3 conseguimos una categoría trenzada $\mathcal{A}_\Phi[[h]]$. Consideremos el objeto 1 de esta categoría. Por el Teorema 2, existe un único funtor $Z = F_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{A}_\Phi[[h]]$ que preserva el producto tensorial y el trenzado tal que $Z(1) = 1$. Este funtor da una representación de B_n por un grupo de series formales cuyos coeficientes son diagramas de cuerdas con n hebras: para cualquier trenza T con n hebras tenemos

$$Z(T) = \sum_{k\geq 0} Z_k(T)\, h^k \tag{5.7}$$

donde $Z_k(T)$ es un elemento del álgebra A_n que es una combinación lineal de diagramas de cuerdas con k cuerdas. Por ejemplo, si σ_1 es el generador de B_2,

$$Z(\sigma_1) = s_1 \circ \exp(ht^{12}/2) = \sum_{k\geq 0} \frac{h^k}{2^k k!}\, s_1 \circ (t^{12})^k. \tag{5.8}$$

Tomando "trazas", obtenemos un invariante de lazos a valores en diagramas de cuerdas en el círculo. Este es el invariante universal de Kontsevich (ver [BN92], [Kas95], Capítulo XX).

El funtor Z es universal para todos los funtores F de la categoría $\mathcal{B}$ en cualquier categoría trenzada de la forma $\mathcal{S}_\Phi[[h]]$, que preserva todas las estructuras. En realidad, sea V el objeto $F(1)$ de $\mathcal{S}$. Por el Teorema 5 existe un único funtor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ que preserva todas las estructuras y tal que $G(1) = V$. Este funtor se extiende a un funtor $G_\Phi[[h]] : \mathcal{A}_\Phi[[h]] \to \mathcal{S}_\Phi[[h]]$. Consideremos la composición $G_\Phi[[h]] \circ Z : \mathcal{B} \to \mathcal{S}_\Phi[[h]]$. Ella manda el objeto 1 en el objeto V. Por la unicidad establecida en el Teorema 2, tenemos

$$F = G_\Phi[[h]] \circ Z, \tag{5.9}$$

que prueba que F se factoriza a través de Z.

El funtor Z se puede usar para probar el siguiente isomorfismo de Kohno [Koh85] entre completados del álgebra de grupo del grupo de trenzas B_n y del álgebra A_n definida en IV.3:

$$\varprojlim_k \mathbf{C}[B_n]/I^k \cong \varprojlim_k A_n/J^k, \tag{5.10}$$

donde I es el ideal bilátero de $\mathbf{C}[B_n]$ generado por los elementos $\sigma_1 - \sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_{n-1} - \sigma_{n-1}^{-1}$, y J es el ideal de A_n generado por los elementos $\{t^{ij}\}_{1\leq i\neq j\leq n}$. La demostración que usa el funtor Z está en [KT95], Apéndice C.

Bibliografía

El contenido de este curso fue tomado esencialmente de [Kas95]. En esta monografía el lector interesado encontrará más detalles. También puede ser muy útil el artículo [Kas93].

La definición original de álgebras envolventes cuánticas es de Drinfeld [Dri87] y Jimbo [Jim85]. Es muy recomendable leer el artículo de Drinfeld [Dri87], pues aquí se explica la motivación de la aparición de los grupos cuánticos a partir de la física.

Las categorías trenzadas fueron inventadas por Joyal y Street [JS93]. En este tema, le aconsejo al lector mirar también [FY89], [JS91].

La construcción del doble se debe a Drinfeld (ver [Dri87]). La construcción del doble de una biálgebra está explicado en [Kas95], Capítulo IX. El contenido de la Lección III se puede encontrar en [KT92].

Con respecto a las Lecciones IV–V, se puede ver [Car93], [Dri89], [Dri90] y [Kas95], Capítulos XIX–XX. En [RT90] y [Tur94] hay aplicaciones de álgebras envolventes cuánticas a nudos y 3-variedades. El invariante de Kontsevich y los diagramas de cuerdas se pueden ver también en [BN92].

Finalmente, hay varios libros sobre grupos cuánticos y temas relacionados, por ejemplo, [CP94], [Gui95], [Jos95], [KRT97], [Lus93], [Maj95], [SS94], [Tur94].

[BN92] D. Bar Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, Topology 34 (1995), 423–472.

[Car93] P. Cartier, *Construction combinatoire des invariants de Vassiliev-Kontsevich des nœuds*, Comptes-Rendus Acad. Sc. Paris 316 (1993), 1205–1210.

[CP94] V. Chari, A. Pressley, *A guide to quantum groups,* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Dri87] V. G. Drinfeld, *Quantum groups*, Proc. I.C.M. Berkeley 1986, Amer. Math. Soc., Providence, RI, vol. 1 (1987), 798–820.

[Dri89] V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras*, Algebra i Analiz 1:6 (1989), 114–148 (= Leningrad Math. J. 1 (1990), 1419–1457).

[Dri90] V. G. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with* $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Algebra i Analiz 2:4 (1990), 149–181 (= Leningrad Math. J. 2 (1991), 829–860)

[FY89] P. J. Freyd, D. Yetter, *Braided compact closed categories with applications to low-dimensional topology*, Adv. Math. 77 (1989), 156–182.

[Gui95] A. GUICHARDET, *Groupes quantiques. Introduction au point de vue formel*, InterEditions and CNRS Editions, Paris, 1995.

[Jim85] M. JIMBO, *A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. 10 (1985), 63–69.

[Jos95] A. JOSEPH, *Quantum groups and their primitive ideals,* Ergebnisse der Math., vol. 29, Springer-Verlag, Heidelberg, 1995.

[JS91] A. JOYAL, R. STREET, *The geometry of tensor calculus, I*, Adv. Math. 88 (1991), 55–112.

[JS93] A. JOYAL, R. STREET, *Braided tensor categories*, Adv. Math. 102 (1993), 20–78.

[Kas93] C. KASSEL, *Invariants des nœuds, catégories tensorielles et groupes quantiques,* Gazette des Mathématiciens, 56 (1993), 63–80, Société Mathématique de France, Paris.

[Kas95] C. KASSEL, *Quantum groups*, Graduate Texts in Math., vol. 155, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1995. ISBN 0-387-94370-6.

[KRT97] C. KASSEL, M. ROSSO, V. TURAEV, *Quantum groups and knot invariants*, Panoramas et Synthèses, vol. 5, Soc. Math. France, Paris, 1997. ISBN 2-85629-055-8, ISSN 1272-3835.

[KT92] C. KASSEL, V. TURAEV, *Double construction for monoidal categories*, Acta Mathematica 175 (1995), 1–48.

[KT95] C. KASSEL, V. TURAEV, *Chord diagram invariants of framed tangles and graphs*, aparecerá en Duke Math. J.

[Koh85] T. KOHNO, *Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures*, Invent. Math. 82 (1985), 57–75.

[Lus93] G. LUSZTIG, *Introduction to quantum groups,* Progr. Math., vol. 110, Birkhäuser, Boston 1993.

[Mac71] S. MAC LANE, *Categories for the working mathematician,* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1971.

[Maj95] S. MAJID, *Foundations of quantum group theory,* Cambridge University Press, Cambridge 1995.

[RT90] N. YU. RESHETIKHIN, V. G. TURAEV, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Commun. Math. Phys. 127 (1990), 1–26.

[SS94] S. STERNBERG, S. SHNIDER, *Quantum groups — from coalgebras to Drinfeld algebras —,* International Press, Cambridge, Mass., 1994.

[Tur94] V. G. TURAEV, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, W. de Gruyter, Berlin 1994.

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur - C.N.R.S.
7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France
E-mail: kassel@math.u-strasbg.fr