ENS Rennes | **Année Scolaire 2013-2014**

Licence de mathématiques - Module EVNCD

Feuille d'exercices numéro 10 : problèmes d'extrema

Extrema

Exercice 1.

Déterminer les points critiques des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$, et préciser leur nature :

1. $f(x, y) = x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$,
2. $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,
3. $h(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$.

Exercice 2.

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel λ, la nature des extrema de la fonction $f(x, y) = y(x^2 + y^2 - 2\lambda y)$.

Exercice 3.

a. Soit ABC un triangle ; trouver le point qui réalise le minimum de $MA^2 + MB^2 + MC^2$, où M varie dans le plan du triangle.

b. Généraliser à un nombre quelconque de points du plan.

Exercice 4.

Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus.

a. Montrer que le minimum de $MA + MB + MC$, où M varie dans le plan du triangle, est atteint en un point M_0 intérieur au triangle.

b. Soient

$$\vec{u} = \frac{A\vec{M}_0}{AM_0}, \quad \vec{v} = \frac{B\vec{M}_0}{BM_0}, \quad \vec{w} = \frac{C\vec{M}_0}{CM_0}.$$

Vérifier que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} = -\dfrac{1}{2}$.

Extrema liés

Exercice 5.

Soient

$$g(x,y,z) = xyz - 32, \quad \mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ g(x,y,z) = 0\}$$

et

$$f(x,y,z) = xy + 2yz + 2xz.$$

Déterminer les extrema relatifs de f sur $\mathcal{S}$.

Exercice 6.

Déterminer le point p du plan $\Sigma = \{(x,y,x+y) \ ; \ x,y \in \mathbb{R}\}$ qui réalise la distance dist $(\Sigma \ , \ (1,0,0))$.

Exercice 7.

Déterminer le minimum et maximum de la fonction $f(x,y,z) = 5x + y - 3z$ sur l'intersection du plan $\Sigma = \{x+y+z=0\}$ avec la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8.

Soit $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| = 1\}$ et $P = \{x \in \mathbb{R}^n | < x, v >= a\}$, où $v \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$ sont fixés. Déterminer la distance de l'hyperplan P à la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$.

Exercice 9. *Parallélépipèdes*

a. Soient n réels strictement positifs $\alpha_i, 1 \leq i \leq n$, tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$. On note

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 1 \right\},$$

et pour $x \in K, f(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Calculer le maximum de f sur K. En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x_1 \geq 0, \cdots \forall x_n \geq 0, \quad x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

b. Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de volume V donné, quel est celui dont la surface est minimale ?

c. Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de surface S donnée, quel est celui dont le volume est maximal ?

d. Quel est le volume du plus grand parallélépipède rectangle qui peut être inclus dans un ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ ?$$