ENS Cachan **Année Scolaire**
Antenne de Bretagne **2012-2013**

Licence de mathématiques - Module EVNCD

Feuille d'exercices numéro 11 : sous-variétés

Exercice 1.

Déterminer, parmi les sous-ensembles définis ci-dessous, ceux qui sont des sous-variétés :

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$;
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; xy = 0\}$;
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; y^2 = x^3\}$.

Exercice 2. *Intersection*

a. L'intersection de deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^n$?

b. Montrer que l'intersection des surfaces d'équations respectives

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ et } x^2 + y^2 - 2x = 0$$

est une courbe lisse C (sous-variété de dimension 1) de $\mathbb{R}^3$ (dessin ?). Déterminer l'équation de la tangente à C en un point (a, b, c).

Exercice 3. *Dimensions*

Soient X et Y deux sous-variétés $\mathcal{C}^0$ de $\mathbb{R}^n$.

a. Si $\dim(X) \neq \dim(Y)$, montrer que X et Y ne sont pas homéomorphes. *Indication :* montrer que $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ ne sont pas homéomorphes quand $p \neq q$.

b. Si $\dim(X) = \dim(Y)$ et $X \subset Y$, montrer que X est un ouvert de Y. En déduire que $\mathbb{S}^2$ n'est pas homéomorphe à une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. *Groupes matriciels*

Justifer que les groupes suivants sont des sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$, donner leur dimension et l'équation de leur espace tangent en l'identité.

1. $Gl_n(\mathbb{R})$,
2. $SL_n(\mathbb{R})$,
3. $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5. *Contour apparent*

Soit S le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$x^3 + yx + z = 0.$$

a. Montrer que c'est une surface lisse (sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$). Donner une equation du plan tangent en chaque point.

b. On s'intéresse à la projection π qui à $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe $(y, z) \in \mathbb{R}^2$, et on note π_S sa restriction à S. On appelera point critique de π_S tout point m tel que la restriction de la différentielle de π au plan tangent T_mS ne soit pas un isomorphisme. On notera C l'ensemble des points critiques de π_S. Expliciter C et montrer que c'est une courbe lisse de $\mathbb{R}^3$.

c. Justifier que $\pi_S(C)$ représente le "contour apparent" de S (dessin).

d. Comparer $\pi_S(C)$ avec l'ensemble $4y^3 + 27z^2 = 0$. Interprétation ? *Indication* : discriminant.

Exercice 6.

Montrer qu'une sous-variété connexe est connexe par arcs.

Exercice 7.

Exercice de recherche : montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de rang r fixé est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.