ENS Cachan — **Année Scolaire**
Antenne de Bretagne — **2012-2013**

Licence de mathématiques - Module EVNCD

Feuille d'exercices numéro 2 : opérateurs et dualité

Opérateurs

Exercice 1. *Complétude de $L(E, F)$*

Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Montrer que si F est complet, alors l'espace $L(E, F)$ muni de la norme d'opérateurs est complet.

Exercice 2. *Un opérateur à noyau*

Soit K une fonction continue sur $[0,1]^2$. On note $E = \mathcal{C}^0([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Pour $f \in E$, on note Tf la fonction donnée par :

$$\forall x \in [0,1] \quad Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy.$$

Montrer que T est un endomorphisme continu sur E, et calculer sa norme.

Exercice 3. *Opérateurs inversibles*

Soit E un espace de Banach. On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des inversibles de $L(E)$ (les éléments de $L(E)$ bijectifs et d'inverse continu).

a. Soit $T \in L(E)$ tel que $\|T\| < 1$. Montrer que $\mathrm{I} - T \in \mathcal{I}$.

b. Montrer que $\mathcal{I}$ est un ouvert de $L(E)$.

c. Montrer que l'application $T \mapsto T^{-1}$ de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{I}$ est continue.

Exercice 4. *Spectre*

Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et $T \in L(E)$. On appelle *valeur spectrale* de T tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda\mathrm{I} - T$ n'est pas inversible. L'ensemble des valeurs spectrales de T est appelé *spectre* de T et noté $\sigma(T)$.

a. Montrer que la suite $\left(\|T^n\|^{1/n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers $r(T) = \inf\limits_{n\geq 1} \|T^n\|^{1/n}$.

b. Montrer que $\sigma(T)$ est fermé.

c. Montrer que $\forall \lambda \in \sigma(T)$, $|\lambda| \leq r(T)$.

Formes linéaires

Exercice 5. *Un calcul de norme*

Sur $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, on définit la forme linéaire μ_f associée à un élément f non nul de E par

$$\forall g \in E, \quad \mu_f(g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Montrer que μ_f est continue et calculer sa norme.

Exercice 6. *Une forme linéaire continue pour une norme et non continue pour une autre*

Sur l'espace de Banach $E = \mathcal{C}^0([0,1])$, on considère la forme linéaire ϕ : $f \mapsto f(0)$. Montrer que ϕ est continue vis-à-vis de la norme $\|.\|_\infty$, mais non continue pour la norme $\|.\|_1$.

Exercice 7. *Norme et noyau d'une forme linéaire*

Soientt E un espace vectoriel normé et H le noyau d'une forme linéaire continue non nulle ϕ. Montrer que pour tout $x \in E$:

$$d(x,H) = \frac{|\phi(x)|}{\|\phi\|}.$$

Exercice 8. *Hahn-Banach en dimension finie*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Soit f une forme linéaire sur F.

a. Si E est euclidien, montrer qu'on peut prolonger f à E en une forme linéaire de même norme.

b. On suppose que $\|f\| = 1$. Soit $u \in E$. Montrer qu'il existe un réel a tel que :

$$f(x) - \|x-u\| \leq a \leq f(y) + \|y-u\|, \quad \forall x, y \in F.$$

c. Soit $u \notin F$. On pose :

$$g(x+tu) = f(x) + ta.$$

Montrer que g prolonge f à $F \oplus \mathbb{R}u$ et que $\|g\| = \|f\|$.

d. Conclure.

Dualité

Exercice 9. *Orthogonal dual*

Soient E un espace vectoriel normé et E' son dual topologique. Étant donné un sous-ensemble A de E, on définit son *orthogonal dual* par

$$A^{\perp} = \{\phi \in E'; \forall x \in A \quad \phi(x) = 0\}.$$

a. Montrer que si $A \subset B \subset E$, alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$. Que vaut $E^{\perp}$?

b. Montrer que $A^{\perp} = (\mathrm{Vect}(A))^{\perp}$ et que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

Pour une partie C de E', on introduit

$$^{\perp}C = \{x \in E; \forall \phi \in C \quad \phi(x) = 0\}.$$

c. Écrire et démontrer les propriétés duales des questions **a** et **b**.

d. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F} \subset {}^{\perp}(F^{\perp})$. En utilisant le théoréme de Hahn-Banach, montrer l'inclusion réciproque.

e. Soit G un sous-espace vectoriel de E'. Prouver que $\overline{G} \subset ({}^{\perp}G)^{\perp}$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?

Exercice 10. *Transposée*

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et soit $T \in L(E, F)$ (applications linéaires continues de E dans F). On définit la *transposée* de T par

$$\forall \phi \in F' \quad T^*\phi = \phi \circ T.$$

a. Vérifier que T^* appartient à $L(F', E')$, et montrer que pour $S, T \in L(E, F)$, $(S + T)^* = S^* + T^*$.

b. Soient G un espace vectoriel normé, $T \in L(E, F)$ et $S \in L(F, G)$. Exprimer $(S \circ T)^*$ en fonction de S^* et T^*.

c. Démontrer que $\mathrm{Ker}(T^*) = (\mathrm{Im}(T))^{\perp}$.

d. À l'aide du théorème de Hahn-Banach, prouver que $\mathrm{Ker}(T) = {}^{\perp}(\mathrm{Im}(T^*))$.

e. Vérifier que $\|T^*\| \leq \|T\|$.

f. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, montrer qu'il y a en fait égalité des normes.

Dualité dans les espaces de suites

Exercice 11. *Dual de* $\ell^2(\mathbb{N})$

On se place sur $\ell^2(\mathbb{N})$, et on considère l'application

$$\ell^2(\mathbb{N}) \times \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}, \quad ((x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \bar{y}_n.$$

a. Montrer qu'il s'agit d'un produit hermitien, qu'on notera $\langle .,. \rangle$, associé à la norme $\|.\|_2$.

b. Pour $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$, on définit l'application $F_y = \langle ., \bar{y} \rangle$. Vérifier qu'il s'agit d'un élément de $(\ell^2(\mathbb{N}))'$.

c. Montrer que $F : y \mapsto F_y$ est une isométrie linéaire de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans $(\ell^2(\mathbb{N}))'$.

d. Prouver que F est surjective. *Indication* : étant donnée une forme linéaire continue ϕ, on pourra considérer les images par ϕ des suites $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$.

Exercice 12. *Dual de* $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < +\infty$

Soit $1 \leq p < +\infty$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour $y \in l^q(\mathbb{N})$, on pose, pour tout élément x de $l^p(\mathbb{N})$:

$$F_y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

a. Montrer que pour tout $y \in l^q(\mathbb{N})$, on a : $F_y \in (l^p(\mathbb{N}))'$.

b. Montrer que $F : y \mapsto F_y$ est linéaire et isométrique de $l^q(\mathbb{N})$ à valeurs dans $(l^p(\mathbb{N}))'$.

Soit $\phi \in l^p(\mathbb{N})'$. On pose $y_n = \phi(e_n)$, où e_n désigne la suite dont tous les termes sont nuls, sauf le terme de rang n qui vaut 1.

c. Pour $p = 1$, montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})$.

d. Pour $p \in]1, +\infty[$, on pose $x_n^N = y_n^{-1}|y_n|^q$ si y_n est non nul et $n \leq N$, et $x_n^N = 0$ sinon. Calculer $\phi(x^N)$. En déduire que $y \in l^q(\mathbb{N})$.

e. Conclure que F est surjective.

Exercice 13. *Autour du dual de* $\ell^\infty(\mathbb{N})$

On rappelle que $c_0(\mathbb{N})$ désigne le sous-espace de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ formé des suites qui tendent vers 0.

a. Montrer que $\ell^1(\mathbb{N})$ s'identifie au dual de $c_0(\mathbb{N})$.

b. En appliquant le théorème de Hahn-Banach, montrer l'existence d'une forme linéaire continue L sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ telle que pour toute suite convergente u, $L(u)$ est égale à la limite de u. En déduire que $\ell^1(\mathbb{N})$ ne s'identifie pas au dual de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Exercice 14. *Opérateurs de shift*

Soit $1 < p < +\infty$; on considère les deux applications définies sur $\ell^p(\mathbb{N})$:

$$S_g : (x_n)_{n\geq 0} \mapsto (x_{n+1})_{n\geq 0}, \quad S_d : (x_n)_{n\geq 0} \mapsto (0, (x_{n-1})_{n\geq 1}) .$$

a. Montrer que S_g et S_d sont deux endomorphismes continus sur $\ell^p(\mathbb{N})$ et expliciter leurs transposées.

b. Montrer que S_d est une isométrie.

c. Si T est une isométrie entre deux espaces vectoriels normés, a-t-on nécessairement $T \circ T^* = \mathrm{I}$?