**ENS Cachan** **Année Scolaire**
**Antenne de Bretagne** **2013-2014**

## Licence de mathématiques - Module EVNCD

## Feuille d'exercices numéro 3 : autour du théorème d'Ascoli

**Exercice 1.** *Équicontinuité*

Soit $(X, d)$ un espace métrique compact. Une partie $H$ de $\mathcal{C}^0(X)$ est dite
– *équicontinue en* $x_0 \in X$ si elle satisfait la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in X \qquad d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \forall f \in H \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

– *équicontinue* si elle est équicontinue en tout point de $X$,
– *uniformément équicontinue* si elle satisfait la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x, y \in X \qquad d(x, y) < \eta \Rightarrow \forall f \in H \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Montrer qu'une partie $H$ de $\mathcal{C}^0(X)$ est équicontinue si et seulement si elle est uniformément équicontinue.

**Exercice 2.** *Équicontinuité et convergence uniforme*

Soient $(X, d)$ un espace métrique compact, $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite équicontinue de $\mathcal{C}^0(X)$ et $D$ une partie dense de $X$. On suppose que la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ converge pour tout $x \in D$ ; montrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0(X)$.

**Exercice 3.** *Théorème d'Ascoli*

Le but est de démontrer le *théorème d'Ascoli* : étant donné un espace métrique compact $(X, d)$, une partie de $\mathcal{C}^0(X)$ est relativement compacte si et seulement si elle est bornée et équicontinue.

**a.** Soit $H$ une partie relativement compacte de $\mathcal{C}^0(X)$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un nombre fini de fonctions $f_1, \ldots, f_r \in H$ telles que $\overline{H} \subset \bigcup_{i=1}^{r} B(f_i, \varepsilon)$.
2. En déduire que $H$ est équicontinue.
3. Conclure.

**b.** Soit $H$ une partie bornée et équicontinue de $\mathcal{C}^0(X)$.

1. Rappeler pourquoi $X$ est séparable. On choisit une partie dénombrable dense $D$.

2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $H$. Montrer qu'on peut en extraire une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que la suite $(f_{n_k}(x))_{k\geq 0}$ converge pour tout $x$ appartenant à $D$.
3. Conclure.

**Exercice 4.** *Fonctions Höldériennes*

Soit $\alpha \in ]0,1]$. On munit $\mathrm{Lip}_\alpha$ de la norme $N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{0\leq x<y\leq 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$. Montrer que la boule unité fermée de $\mathrm{Lip}_\alpha$ est une partie compacte de $\mathcal{C}^0([0,1])$.

**Exercice 5.** *Opérateurs à noyaux*

Soient $X, Y$ deux espaces métriques compacts et $\mu$ une mesure borélienne de masse finie sur $Y$. Étant donnée une fonction $K \in \mathcal{C}^0(X\times Y)$, on définit un opérateur linéaire $T : \mathcal{C}^0(Y) \to \mathcal{C}^0(X)$ par

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(Y), \quad \forall x \in X, \quad Tf(x) = \int_Y K(x,y)f(y)d\mu(y).$$

Montrer que $T$ est compact.

**Exercice 6.** *Équicontinuité sur un compact connexe*

Soit $X$ un espace métrique compact et soit $H$ une partie équicontinue de $\mathcal{C}^0(X)$.

**a.** Démontrer que l'ensemble des $x \in X$ tels que $\{f(x), f \in H\}$ est borné est à la fois ouvert et fermé.

**b.** On suppose de plus $X$ connexe. Montrer que s'il existe un point $x_0 \in X$ tel que $\{f(x_0), f \in H\}$ est borné, alors $H$ est relativement compacte.

**Exercice 7.** *Longueur d'un arc rectifiable*

On appelle *arc rectifiable* un sous-ensemble $C$ de $\mathbb{R}^d$ qui est l'image d'une application Lipschitzienne $c : [0,1] \to \mathbb{R}^d$. On appelle *longueur* de l'arc, $l(C)$, l'infimum des constantes de Lipschitz de toutes les applications surjectives $c : [0,1] \to C$. Montrer que cet infimum est atteint.