ENS Rennes **Année Scolaire 2013-2014**

Licence de mathématiques - Module EVNCD

Feuille d'exercices numéro 4 : conséquences du théorème de Baire

Théorème de Banach-Steinhaus

Exercice 1. *Suites*

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombre complexes telle que pour tout élément $(b_n)_{n\geq 0}$ de $\ell^2(\mathbb{N})$, $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n b_n| < +\infty$. Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$.

Exercice 2. *Séries de Fourier*

On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques, que l'on munit de la norme uniforme. Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on pose :

$$c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}\,dt.$$

Pour $n \geq 1$, on pose :

$$T_n(f) = \sum_{p=-n}^{n} c_p(f).$$

a. Montrer que $T_n : \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue.

b. Donner une expression synthétique pour T_n.

c. Calculer la norme de T_n.

d. Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, la série de Fourier de f converge-t-elle simplement vers f ?

Exercice 3. *Caractérisation des parties bornées d'un espace vectoriel normé*

a. Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E. On suppose que pour tout $\phi \in E'$, l'ensemble $\phi(A)$ est borné. Montrer que A est bornée.

Dans la suite, E et F sont deux espaces vectoriels normés.

b. Soit $T : E \to F$ une application linéaire. Montrer que T est continue si et seulement si pour tout élément ϕ de F', la forme linéaire $\phi \circ T$ est continue.

c. Soit Φ une application de E dans F. On suppose que pour tout $\phi \in F'$, la fonction $\phi \circ \Phi$ est lipschitzienne. Montrer que Φ est lipschitzienne.

Exercice 4. *Une limite double*

Soient E et F deux espaces de Banach et soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $L(E,F)$. On suppose que pour tout x de E, la suite $(T_n x)_{n\geq 0}$ converge vers une limite notée Tx. Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de E qui converge vers $x \in E$, alors $T_n x_n \underset{n}{\longrightarrow} Tx$.

Théorème du graphe fermé

Exercice 5. *Critères de continuité pour $T : E \to E'$*

Soit E un espace de Banach et soit $T : E \to E'$ linéaire.

a. On suppose que

$$\forall x \in E \quad \langle Tx, x\rangle_{E',E} \geq 0.$$

Montrer que T est continu.

b. Même question en supposant que

$$\forall x, y \in E \quad \langle Tx, y\rangle_{E',E} = \langle Ty, x\rangle_{E',E}.$$

Exercice 6. *Sous-espaces fermés de $\mathcal{C}^0([0,1])$*

On considère, dans l'espace de Banach $E = \left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty\right)$, un sous-espace fermé F tel que tout élément de F soit de classe $\mathcal{C}^1$.

a. Montrer que l'application $T : F \to E, f \mapsto f'$ est continue.

b. Montrer que la boule unité de F est équicontinue.

c. En déduire que F est de dimension finie.

Théorème de l'application ouverte

Exercice 7.

Soient E et F deux espaces de Banach, et soit $T \in L(E,F)$. Prouver que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$,
2. T est injectif et son image est fermée.

Exercice 8.

Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T \in L(E, F)$ surjectif.

a. Soit A un sous-ensemble de E. Montrer que $T(A)$ est fermé dans F si et seulement si $A + \operatorname{Ker} T$ est fermé dans E.

b. Soit L un espace de Banach et soient M un sous-espace vectoriel fermé de L et N un sous-espace vectoriel de dimension finie de L. Montrer que $M + N$ est fermé.

c. Déduire des questions précédentes que si G est un sous-espace vectoriel fermé de E et $\dim(\operatorname{Ker} T) < +\infty$, alors $T(G)$ est fermé.

Exercice 9. *Supplémentaires topologiques*

Soient E un espace de Banach et F, G deux sous-espaces vectoriels fermés de E. On suppose que F et G sont des *supplémentaires algébriques*, c'est-à-dire :

$$F + G = E, \quad F \cap G = \{0\}.$$

Montrer que F et G sont des *supplémentaires topologiques* : les projections associées sont continues.