ENS Rennes **Année Scolaire 2013-2014**

Licence de mathématiques - Module EVNCD

Feuille d'exercices numéro 5 : espaces de Hilbert

Propriétés générales

Exercice 1. *Norme et formes linéaires continues*

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Montrer (sans utiliser le théorème de Hahn-Banach) que pour tout $x \in \mathcal{H}$ on a :

$$\|x\| = \max_{f \in \mathcal{H}', \|f\| \leq 1} |f(x)|.$$

Exercice 2. *Convergence*

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

a. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'éléments de la boule unité de $\mathcal{H}$ telles que $\langle x_n, y_n \rangle \to 1$. Montrer que $\|x_n - y_n\| \to 0$.

b. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}$ qui converge faiblement vers $x \in \mathcal{H}$, et telle que $\|x_n\| \to \|x\|$. Montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x.

c. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}$ qui converge faiblement vers $x \in \mathcal{H}$. Montrer que pour tout $T \in L(\mathcal{H})$, la suite $(Tx_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers Tx.

d. Montrer que toute suite faiblement convergente de $\mathcal{H}$ est bornée.

e. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'éléments de $\mathcal{H}$. On suppose que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers x et que $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers y. Démontrer que la suite $(\langle x_n, y_n \rangle)_{n\geq 0}$ converge vers $\langle x, y \rangle$.

Exercice 3. *Noyaux reproduisants*

Soient X un ensemble et E l'espace vectoriel des fonctions de X dans $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ de E muni d'une structure d'espace de Hilbert, et tel que pour tout $x \in X$, la forme linéaire définie sur $\mathcal{H}$ par $f \mapsto f(x)$ est continue.

a. Montrer qu'il existe une unique fonction K de X^2 dans $\mathbb{C}$ vérifiant

– pour tout y de X, la fonction $K(.,y) : x \mapsto K(x,y)$ appartient à $\mathcal{H}$,

– $\forall f \in \mathcal{H}$, $\forall y \in X$, $\langle f, K(.,y) \rangle = f(y)$.

K est appelé le *noyau reproduisant* de $\mathcal{H}$.

b. Démontrer que K vérifie

$$\forall x, y \in X \quad \overline{K(x,y)} = K(y,x).$$

c. Prouver que la famille $\{K(.,y); y \in X\}$ est totale dans $\mathcal{H}$.

Opérateurs

Exercice 4. *Condition suffisante de nullité d'un opérateur*

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, et soit $T \in L(\mathcal{H})$ tel que pour tout x de $\mathcal{H}$, $\langle Tx, x \rangle = 0$. Montrer que $T = 0$. Que dire si le corps de base est $\mathbb{R}$?

Exercice 5. *Opérateur normaux*

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Un opérateur $T \in L(\mathcal{H})$ est dit *normal* si $TT^* = T^*T$.

a. Montrer que T est normal si et seulement si $\forall x \in \mathcal{H}$, $\|Tx\| = \|T^*x\|$.

b. Montrer que si T est normal, il vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Ker}(T)$,
2. $\mathrm{Im}(T)$ est dense dans $\mathcal{H}$ si et seulement si T est injectif,
3. T est inversible si et seulement si il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{H}$, $\|Tx\| \geq \delta \|x\|$,
4. si $Tx = \alpha x$ pour $x \in \mathcal{H}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $T^*x = \bar{\alpha}x$,
5. si α et β sont deux valeurs propres distinctes de T, les sous-espaces propres correspondants sont orthogonaux.

Exercice 6. *Rayon spectral*

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in L(\mathcal{H})$. On rappelle que le rayon spectral de T est le réel positif $r(T) = \inf\limits_{n \geq 1} \|T^n\|^{1/n}$, et que le spectre de T est borné par $r(T)$.

a. Soit $T \in L(\mathcal{H})$. Exprimer la norme de T^*T en fonction de celle de T.

b. Soit T un opérateur auto-adjoint. Montrer que $r(T) = \|T\|$.

c. Soit T un opérateur normal. Montrer que $r(T) = \|T\|$.

d. Soit $T \in L(\mathcal{H})$. Montrer que $\|T\| = \sqrt{r(T^*T)}$.

Exercice 7. *Opérateurs diagonaux*

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert (séparable) et soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$. D'autre part, soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite de scalaires.

a. Montrer que l'opérateur D défini par $\forall n \in \mathbb{N}$, $De_n = \lambda_n e_n$, est continu si et seulement si $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ est bornée. Le cas échéant, que vaut $\|D\|$?

b. Montrer que D est inversible si et seulement si $\inf_{n\geq 0} |\lambda_n| > 0$. Calculer alors $\|D^{-1}\|$.

c. Montrer que D est compact si et seulement si $(\lambda_n)_n$ tend vers 0.

d. Exprimer D^* en fonction de la suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$.

e. Identifier le spectre de D.

Exercice 8. *Opérateurs de rang* 1

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et T un opérateur continu sur $\mathcal{H}$, et de rang 1, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension 1. Soit ψ un élément non nul de $\mathrm{Im}(T)$.

a. Prouver qu'il existe $\phi \in \mathcal{H}$ tel que $\forall x \in \mathcal{H}$, $Tx = \langle x, \phi \rangle \psi$, et que $\|T\| = \|\psi\| \, \|\phi\|$.

b. Démontrer que $T^2 = \langle \psi, \phi \rangle T$. En déduire que si $\langle \psi, \phi \rangle \neq 1$, alors $I - T$ est inversible ; calculer alors son inverse.

c. Exprimer T^* en fonction de ϕ et ψ.

d. Quel est le spectre de T ?