ENS Rennes **Année Scolaire 2013-2014**

Licence de mathématiques - Module EVNCD

Feuille d'exercices numéro 7 : théorème et inégalité des accroissements finis

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 1/x), x \in \mathbb{R}^*\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, calculer Df. En déduire les valeurs de f.

Exercice 2.

a. Soit f une application réelle continue et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f'(x)$ ait une limite quand $x \to b^-$. Montrer que f se prolonge en une fonction continue et dérivable à gauche au point b.

b. Soit f une application continue et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et de dérivée croissante ; montrer que f est convexe sur I i.e. $f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ pour tous $x < y$ de I et $t \in [0,1]$.
Indication : poser $z = (1-t)x + ty$ et considérer $[x,z]$ et $[z,y]$.

Exercice 3.

Montrer que l'identité des accroissements finis n'est pas valable pour les fonctions à valeurs vectorielles (par exemple de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$). Quel résultat analogue à cette identité peut-on formuler pour des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 4.

Soit f est une fonction continue sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur $]a,b[$. Montrer que $f'(]a,b[)$ est connexe.

Exercice 5. *Inégalités différentielles*

a. Soit f une application différentiable de $]a,b[\subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$; on suppose qu'il existe $k \geq 0$ tel que

$$\|f'(t)\| \leq k\|f(t)\|, \quad \forall t \in]a,b[.$$

Montrer que si f s'annule en $t_0 \in]a,b[$, alors elle est identiquement nulle sur $]a,b[$.

Indication : on pourra dans un premier temps montrer qu'il existe $h > 0$ telle que f est nulle sur $I_h = [t_0 - h, t_0 + h]$, en posant $M = \sup_{t \in I_h} \|f(t)\|$).

b. On se donne un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $g : U \to \mathbb{R}^n$. On considère le système différentiel

$$(S) \quad y' = g(t, y), \;\; y(t_0) = x.$$

Montrer que si g est k-lipschitzienne par rapport à y, alors le système admet au plus une solution sur un intervalle contenant t_0.

c. *Lemme de Gronwall* : Soient $u :]a, b[\to \mathbb{R}$ et $v :]a, b[\to \mathbb{R}$ continues, v positive vérifiant : pour tout $t \in]a, b[$ on a $u(t) \leq A + \int_a^t u(s)v(s)\, ds$ où $A > 0$. Montrer que pour tout $t \in]a, b[$, on a $u(t) \leq A.exp\left(\int_a^t v(s)\, ds\right)$.

Indication : étudier la fonction $t \mapsto \frac{A + \int_a^t u(s)v(s)\, ds}{A.exp\left(\int_a^t v(s)\, ds\right)}$.

d. Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions du système différentiel (S) pour les conditions initiales $y_1(t_0) = x_1$ et $y_2(t_0) = x_2$, alors elles vérifient

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| e^{k|t - t_0|}.$$

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$ et $g = f \circ f$.

a. Montrer que f et g sont de classe C^1.

b. Calculer en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice jacobienne de f, puis calculer la matrice jacobienne de g au point $(0, 0)$.

c. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \overline{B_\rho((0, 0))}$ on a $||Dg(x, y)|| \leq 1/2$.

d. Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\overline{B_\rho((0, 0))}$.

Exercice 7.

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = (\cos x - \cos y, \; \sin x - \sin y)$.

a. Montrer que $\|DF(x, y)\| \leq \sqrt{2}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b. En déduire que la suite récurrente définie par (x_0, y_0) et pour $n \geq 1$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\cos x_n - \cos y_n), \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin x_n - \sin y_n)$$

converge pour tout (x_0, y_0). Quelle est sa limite ?

Exercice 8. *Prolongement en dimension $n \geq 2$*

Soient E et F des espaces de Banach, $a \in E$, et $R > 0$. On pose

$$U = \{x \in E,\ 0 < \|x - a\| < R\}.$$

Soit $f : U \to F$ différentiable telle que $\forall x \in U$, $\|Df(x)\| \leq k$. On suppose E de dimension plus grande que 2.

a. Montrer que $\forall (x, y) \in U^2$, $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$.

b. Montrer que f a une limite α au point a.

c. On suppose que $Df(x)$ a une limite L en a, et on prolonge f en posant $f(a) = \alpha$. Montrer que f est différentiable en a, et que $Df(a) = L$.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie sur $U \cup \{a\}$ par $g(x) = f(x) - L(x - a)$.