ENS Rennes **Année Scolaire 2013-2014**

Licence de mathématiques - Module EVNCD

Feuille d'exercices numéro 8 : dérivées d'ordre supérieur

Différentielles d'ordre supérieur

Exercice 1.

On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}.$$

Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0)$.

Exercice 2.

Soit $f(x,y)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage du cercle $x^2+y^2=1$. On pose $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = a$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = b$. Pour tout nombre réel θ, soit $F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$. Calculez $F''(0)$ en fonction de a et b.

Exercice 3.

Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application bilinéaire. Montrer que B est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et déterminer les différentielles $D^k B$.

Exercice 4.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'opérateur *laplacien* Δ dans U est l'application qui associe à $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ la fonction continue $\Delta f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}$.

a. Monter que pour $f, g \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$, on a : $\Delta(fg) = g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + f\Delta g$.

b. Montrer que pour $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ et $A \in O(n)$ (matrices orthogonales de taille $n \times n$) on a

$$\Delta(f \circ A) = (\Delta f) \circ A.$$

c. Une fonction $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ est dite *harmonique* si $\Delta f = 0$. Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :

1. $f(x,y) = (\cos(x) - \sin(x))e^y$,
2. $g_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \begin{cases} \ln \|x\|_2 & \text{si } n = 2 \\ \|x\|_2^{2-n} & \text{si } n > 2 \end{cases}$

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

a. Soit $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fixé. On définit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(ta)$. Montrer que $g'(t) = Df(ta)a$.

b. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est positivement homogène de degré α si $f(tx) = t^\alpha f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer l'identité suivante, dite d'Euler : pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$Df(x)x = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x) \ .$$

c. Montrer la réciproque : si pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $Df(x)x = \alpha f(x)$, alors f est positivement homogène de degré α.

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^2$.

a. Soit $h \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application définie par $\varphi_h(x) = Df(x)(h)$. Justifier que

$$D^2 f(a)(k,h) = D\varphi_h(a)(k) \quad \text{pour tout} \ \ k \in \mathbb{R}^n \ .$$

b. Supposons que, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $f(tx) = t^2 f(x)$. Montrer que $D^2 f(0)(x,x) = 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

c. Soit $a, h, k \in \mathbb{R}^n$ et soit $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ définie par $\Psi(t,s) = f(a+th+sk)$. Calculer $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial s}(0,0)$.

Exercice 7.

a. Trouver les applications $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = 0$.

b. Trouver les applications $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \ .$$

Indication : poser $\varphi(u,v) = \frac{1}{2}(u+v, u-v)$ et $G = F \circ \varphi$.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application linéaire $Df(x)$ est un automorphisme orthogonal, i.e. $Df(x)$ est bijective et conserve le produit scalaire :

$$\langle Df(x)(h), Df(x)(k) \rangle = \langle h, k \rangle \quad \text{pour tout} \ \ h, k \in \mathbb{R}^n \ .$$

a. Déterminer la différentielle de $x \mapsto \langle Df(x)(h), Df(x)(k)\rangle$.

b. Vérifier que $A(h,k,l) = \langle Df(x)(h), D^2f(x)(k,l)\rangle$ est antisymétrique par rapport aux deux premières variables et symétrique par rapport aux deux dernières variables.

c. Montrer que $A(h,k,l) = 0$ pour tous $h,k,l \in \mathbb{R}^n$.

d. En déduire que l'application f est un automorphisme orthogonal, c'est-à-dire qu'il existe un automorphisme linéaire orthogonal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et un vecteur $A \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = Lx + A$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Formules de Taylor

Exercice 9.

Déterminer le développement de Taylor à l'ordre 2 au point $(1,1)$ de la fonction
$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \frac{x-y}{x+y}.$$

Exercice 10.

Déterminer approximativement la valeur de $1,05^{1,02}$ avec une erreur d'au plus $\epsilon < 10^{-2}$. Indication : appliquer une formule de Taylor à la fonction $f(x,y) = x^y$.

Exercice 11.

Ecrire le développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$ pour la fonction $f(x,y) = \frac{e^x}{\cos y}$. En déduire la limite de $\frac{e^x-(1+x)\cos y}{(x^2-y^2)\cos y}$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

Exercice 12. *Lemme d'Hadamard*

a. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^∞ et soit $n \geq 1$. Établir l'équivalence des propriétés suivantes :

– $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$.

– $f(x) = x^n g(x)$ avec $g \in C^\infty$.

b. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. On suppose $f(0) = 0$ et $Df(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $g_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ telles que $f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j g_{i,j}(x)$.