ENS Rennes **Année Scolaire 2013-2014**

Licence de mathématiques - Module EVNCD

Feuille d'exercices numéro 9 : inversion locale et fonctions implicites

Difféomorphismes, inversion locale

Exercice 1.

On considère la fonction $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Montrer que c'est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais que ce n'est pas un difféomorphisme global. Donner des ouverts V et W de U maximaux tel que $f : V \to W$ soit un difféomorphisme global.

Exercice 2.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $f'(0) \neq 0$ mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Expliquer.

Exercice 3.

On considère $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles de taille n, muni d'une norme d'algèbre (i.e. satisfaisant $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$).

a. Calculer $D\exp(0)$.

b. Montrer que exp réalise un difféomorphisme local d'un voisinage de 0 sur un voisinage de I.

c. Montrer que ce n'est pas un difféomorphisme global de E sur son image pour $n \geq 2$. L'inverse local est appelé *détermination principale du logarithme*, comme dans le cas de l'exponentielle complexe.

Exercice 4. *Fonctions strictement monotones*

Soit E un espace euclidien de dimension finie, muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de la norme $\|.\|$ associée. Une application $f : E \to E$ est dite *strictement monotone* s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2 \ \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq k\|x - y\|^2.$$

a. Soit $f : E \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est strictement monotone si et seulement si :

$$\exists k > 0 \ \forall x \in E, \ \forall h \in E \ \langle Df(x).h, h \rangle \geq k\|h\|^2.$$

b. Montrer que si $f : E \to E$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, alors c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global sur E.

Exercice 5. *Théorème de redressement de champs de vecteurs : "flow box"*

On se donne un champ de vecteurs sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, c'est-à-dire une application $X : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On notera $y = \varphi_t(x)$ la solution du système différentiel :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dt} & = & X(y) \\ \\ y(0) & = & x \end{array}\right.$$

L'application $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ est le flot du champ X, on admettra qu'elle est $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $(0, 0)$. On veut montrer le théorème suivant : si $X(0) \neq 0$, il existe un difféomorphisme f (changement de coordonnées locales $y = f(\tilde{y})$) qui transforme le système en :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{d\tilde{y}}{dt} & = & \tilde{X}(\tilde{y}) & = (1, 0, \ldots, 0) \\ \\ \tilde{y}(0) & = & \tilde{x} & \end{array}\right.$$

c'est-à-dire que le champ X est redressé en le champ constant $\tilde{X}$.

a. Montrer le théorème dans le cas $n = 1$.

b. Cas $n \geq 2$. On peut supposer $X_1(0) \neq 0$. Montrer que l'application

$$f(t, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_t(0, x_2, \ldots, x_n)$$

convient.

c. Application : Dessiner et redresser le champ $X(x, y) = (x, y)$ au voisinage de $(1, 0)$.

Théorème des fonctions implicites

Exercice 6.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ et C l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 0$. En quels points (a, b) peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites ? Calculer la dérivée de la fonction implicite lorsqu'elle existe et écrire l'équation de la tangente à C.

Exercice 7.

On considère $E = M_n(\mathbb{R})$, $F = GL(n, \mathbb{R})$. Montrer avec le théorème des fonctions implicites que $inv : A \in F \to A^{-1}$ est différentiable en tout point de F et calculer sa différentielle.

Exercice 8. *Racines d'un polynôme*

a. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé et $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre. On considère l'équation (E_λ) :

$$x^m + \lambda x - 1 = 0.$$

On connait les racines quand $\lambda = 0$, on veut en déduire des informations sur les racines pour λ proche de 0.

1. On commence par les racines réelles. Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage W de 1 dans $\mathbb{R}$, et $\varphi : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$\forall x \in W,\ \forall \lambda \in V,\ x^m + \lambda x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(\lambda).$$

   Donner le développement limité de φ à l'ordre 1 au voisinage de 0.

2. On traite maintenant le cas des racines complexes. On note $\theta_k = 2k\pi/m$. Montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, il existe un voisinage V_k de 0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage W_k de $e^{i\theta_k}$ dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, et $\varphi_k : V_k \to W_k$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que :

$$\forall z \in W_k,\ \forall \lambda \in V_k,\ z + \lambda z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \varphi_k(\lambda).$$

   Indication : poser $z = x + iy$ et travailler dans $\mathbb{R}^2$.

b. Généralisation : on pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soient $P_0 \in E$ et x_0 une racine réelle de P_0.

1. Donner une condition suffisante sur P_0 et x_0 pour affirmer que tout polynôme voisin de P_0 dans E admet une racine réelle x proche de x_0, cette racine dépendant de façon $\mathcal{C}^1$ des coefficients du polynôme.
2. Montrer par un exemple que, sans hypothèse supplémentaire, ce résultat n'est pas toujours vérifié.