Université de Strasbourg **L2 Mathématiques**

2016-2017

Calcul différentiel, feuille 1 : continuité, différentielle

1 Continuité

Exercice 1. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

est continue en $(0,0)$.

Exercice 2. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{|xy|}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

est continue en $(0,0)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Montrer que $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ sont continues en 0, mais f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 4. Décider si les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par les formules ci-dessous sont continues en (0,0) :

1. $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$,

2. $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^6+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$,

3. $f(x,y) = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

2 Différentiabilité

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = 24y + 63z - 5$. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et calculer sa différentielle.

Exercice 6. Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ est différentiable en tout point $a \in \mathbb{R}$ et calculer $df(a)$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que $|f(x)| \leq C\|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f est différentiable en zéro et calculer $df(0)$.

Exercice 8 (Applications bilinéaires)**.** Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, où E, F, G sont des espaces vectoriels de dimension finie, munis des normes $\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F$ et $\|\cdot\|_G$. On rappelle que B est alors continue, ce qui signifie qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$,

$$\|B(x, y)\|_G \leq C\|x\|_E\|y\|_F.$$

1. Montrer que B est différentiable sur $E \times F$ et calculer sa différentielle $dB(a, b)$ en un point (a, b) de $E \times F$.
2. Soient f et g deux applications différentiables de I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\phi : I \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$$

est différentiable sur I, et calculer sa différentielle.

Exercice 9. Soit $k > 1$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad f(tx) = t^k f(x)$$

(on dit que f est homogène de degré k). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $df(x) \cdot x = kf(x)$. Indication : dériver la fonction $t \mapsto f(tx)$.

Exercice 10 (Différentielle de l'inverse)**.** Le but de cet exercice est de calculer la différentielle de $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}),\ A \mapsto A^{-1}$.

1. Expliquer pourquoi $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$. On admettra que ϕ est différentiable sur celui-ci (cela découle par exemple de la formule $A\ \mathrm{com}(A)^\top = \det(A)I_n$).
2. Montrer que l'application $g : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ qui envoie (A, B) sur le produit AB est différentiable et calculer sa différentielle.
3. Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ une application différentiable, et soit $F : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}), \quad (A, B) \mapsto Af(B)$. Montrer que F est différentiable et calculer sa différentielle.
4. En déduire, à l'aide de la formule $AA^{-1} = I_n$, la différentielle de ϕ au point $A \in GL_n(\mathbb{R})$.