Université de Strasbourg **L2 Mathématiques**

2016-2017

Calcul différentiel, feuille 2 : dérivées directionnelles, dérivées partielles

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Montrer que f admet des dérivées dans toutes les directions en $(0,0)$, mais n'est pas différentiable en ce point.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Montrer que f admet des dérivées dans toutes les directions en $(0,0)$, et est continue mais pas différentiable en ce point.

Exercice 3. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais f' n'est pas continue en 0.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable. On considère la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u(t) = f(t, -t)$. Montrer que u est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \exp(x^2y) + x^3 \sin y$. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point et calculer celles-ci.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (\cos x \cos y, xy, x^2+y^3)$. Montrer que f est différentiable en tout point et calculer $J_f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 7. On considère les fonctions

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto \Big(\ln(1+x^2+y^2), x^2+y^2-z^2, \cos(xz)\Big)$$

et

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto 3x^2y + e^{xz^2} + 4z^3.$$

Déterminer la matrice jacobienne de g au point $(0,-1,1)$ et celles de f et $\phi = g \circ f$ au point $(0,0,1)$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xy + z^3 \arctan y$. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point et calculer $\nabla f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable et telle que

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x, y) = (x + y, x + 2y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, et que sa réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

2. On pose $g(u, v) = f(\phi^{-1}(u, v))$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que g admet une dérivée partielle par rapport à u et calculer $\frac{\partial g}{\partial u}$.