Université de Strasbourg **L2 Mathématiques**

2016-2017

Calcul différentiel, feuille 4 : problèmes d'extrema

1 Points critiques et extrema

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - 3y^3$. Montrer que le point $(0,0)$ est un point critique de f, que la forme quadratique $q_{f,(0,0)}(\cdot) = d^2f(0,0)(\cdot,\cdot)$ est positive, mais que f n'atteint pas un minimum local en $(0,0)$.

Exercice 2. Déterminer les points critiques des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ci-dessous et préciser leur nature (extremum relatif, point selle ou ni l'un ni l'autre). Préciser si les extrema locaux obtenus sont globaux. Donner également l'allure des courbes de niveaux.

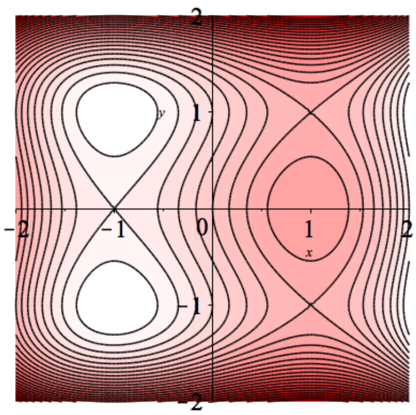
1. $f(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{1}{4}y^4$,
2. $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Exercice 3. Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

et préciser leur nature.

Exercice 4. On a représenté ci-dessous quelques courbes de niveaux d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Le dégradé de rouge indique les valeurs prises par f ; plus la couleur est foncée, plus la valeur correspondante de f est élevée.



1. Conjecturer les points critiques de f sur $[-2, 2] \times [-2, 2]$, ainsi que leur nature.
2. Sachant que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$, déterminer tous les points critiques de f et leur nature. Vérifier que la conjecture de la question précédente était bonne.

2 Extrema avec contraintes

Exercice 5. Déterminer les points du plan d'équation $2x - y + 2z = 18$ dans $\mathbb{R}^3$ les plus proches de l'origine, et en déduire la distance entre ce plan et l'origine.

Exercice 6. On considère la fonction $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xy$ où $\mathbb{S}^2$ est la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$, d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1. f possède-t-elle des extrema globaux sur $\mathbb{S}^2$?
2. Déterminer les extrema relatifs de f sur $\mathbb{S}^2$.
3. Préciser la nature de ceux-ci.

Exercice 7. On veut réaliser une boîte parallélépipédique contenant un certain volume V fixé de liquide, de la manière la plus économique possible, c'est-à-dire en faisant en sorte que la surface S de la boîte soit minimale.

1. Exprimer V et S en fonction des longueurs x, y et z de la boîte.
2. Traduire le problème sous la forme d'une recherche d'extrema sous contrainte.
3. Résoudre celui-ci. Quelle est la forme de la boîte la plus économique ? Calculer sa surface quand $V = 125$ cm^3.