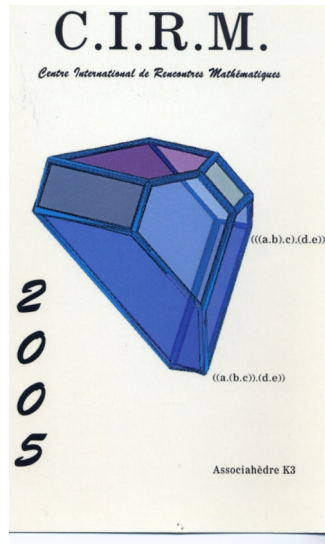
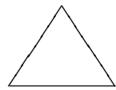


CARTE DE VOEUX À L'ASSOCIAEDRE

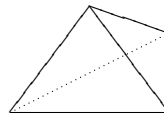
JEAN-LOUIS LODAY



Il y a cinq ans le Centre International de Rencontres Mathématiques de Luminy a envoyé ses voeux avec la carte ci-dessus. L'illustration choisie par Robert Coquereaux, directeur du CIRM à cette époque là, était tout à fait adaptée pour l'an 5 du nouveau millénaire puisque ce polyèdre comporte plusieurs pentagones parmi ses faces. Les polygones vivent en dimension 2, les polyèdres vivent en dimension 3, ils ont comme faces des polygones. En dimension quelconque les objets analogues aux polygones et polyèdres sont appelés des *polytopes*. Intéressons-nous tout d'abord aux polytopes les plus simples que sont le triangle et le tétraèdre :



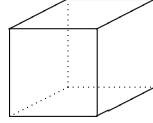
Δ^2



Δ^3

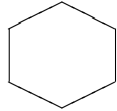
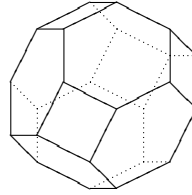
Ils font partie d'une famille infinie de polytopes appelés les *simplexes standards*. En dimension n le n -simplexe Δ^n a $n+1$ sommets de coordonnées $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ dans l'espace euclidien \mathbb{R}^{n+1} . Ces points appartiennent à un même hyperplan et leur enveloppe convexe est Δ^n .

De même le carré et le cube

 Q^2  Q^3

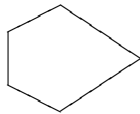
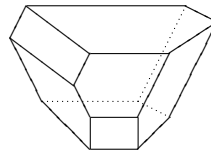
sont les deux premiers polytopes d'une famille infinie : les *hypercubes*. Les coordonnées des 2^n sommets de l'hypercube de dimension n sont données par (x_1, \dots, x_n) dans \mathbb{R}^n où x_i vaut 0 ou 1.

Si l'on part d'un hexagone, la famille infinie est moins connue, mais tout aussi facile à construire :

 P^2  P^3

Ce sont les *permutoèdres*. Il y a un sommet pour chaque permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. En fait les coordonnées du point de \mathbb{R}^n associé à une permutation sont justement données par la permutation de $(1, 2, \dots, n)$. Ces points sont évidemment dans l'hyperplan d'équation $x_1 + \dots + x_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et leur enveloppe convexe est le permutoèdre P^{n-1} de dimension $n-1$. Le permutoèdre tri-dimensionnel ci-dessus était déjà connu d'Albrecht Dürer (1471–1528). Il est aussi connu en physique sous le nom de cellule de Birkhoff.

Mais quid du pentagone ? A-t-il un analogue en dimension 3 ? Appartient-il à une famille infinie ? Le polytope de la carte de vœux est précisément le polytope de dimension 3 qui permet de débiter une famille infinie :

 K^2  K^3

C'est la famille des *associaèdres*. Leur histoire commence en 1962 lorsque Jim Stasheff, un mathématicien américain, construit pour tout entier n un complexe cellulaire qui lui permet de résoudre des problèmes importants de topologie algébrique. En 1979 on s'aperçoit que l'on peut construire ces espaces comme des polytopes, mais ce n'est qu'en 2002 qu'une construction explicite et simple apparaît.

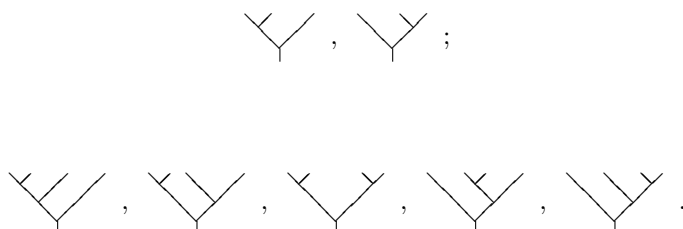
Il faut savoir que les sommets de l'associaèdre sont en bijection avec les parenthésages d'un mot à $n + 1$ lettres. Par exemple pour $n = 2$ il y a deux parenthésages possibles :

$$((xx)x) \text{ et } (x(xx)).$$

Pour $n = 3$ il y en a cinq :

$$(((xx)x)x), \quad (((x(xx))x), \quad ((xx)(xx)), \quad (x((xx)x)), \quad (x(x(xx))).$$

Il est, dans notre cas, plus visuel de remplacer les parenthésages par des arbres binaires planaires enracinés (on dira simplement "arbre") :



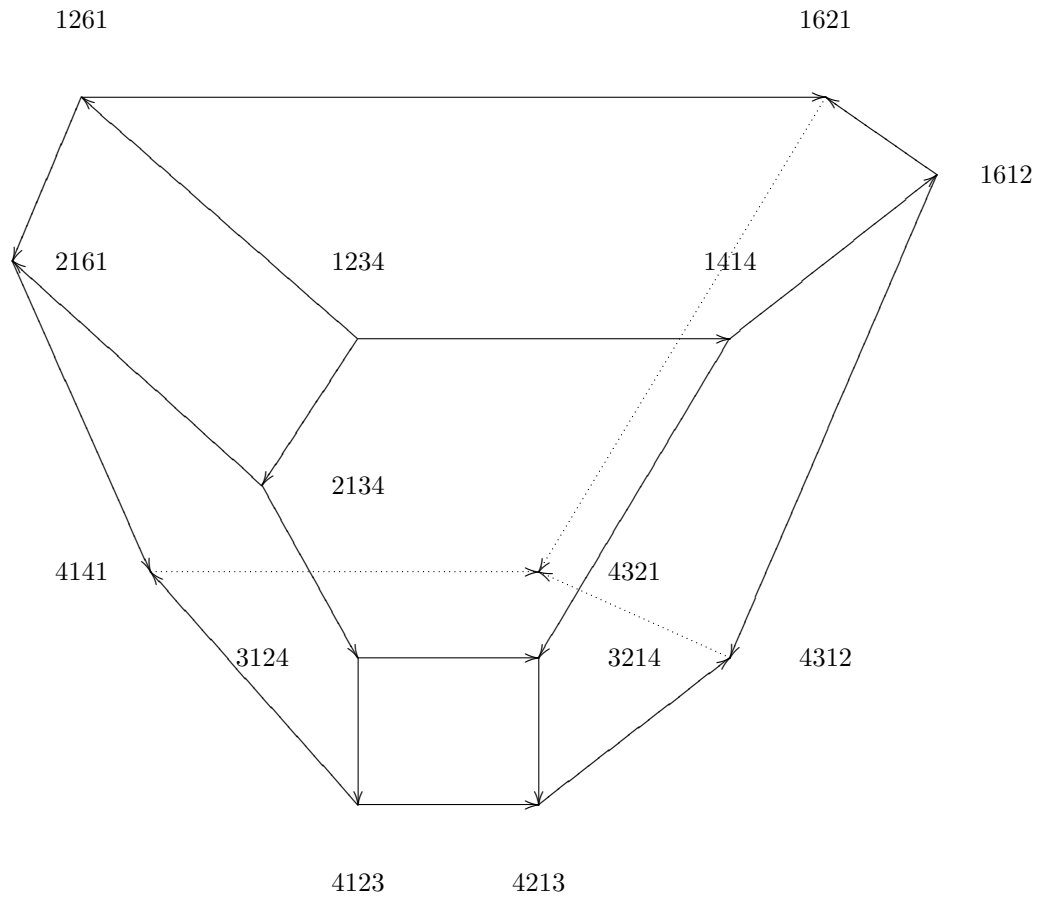
Pour construire l'associaèdre, on va associer à tout arbre t à n sommets internes (donc à $n + 1$ feuilles), un point $M(t)$ de \mathbb{R}^n . Ses coordonnées explicites sont les suivantes :

$$M(t) := (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$$

où les entiers a_i et b_i sont déterminés comme suit. Tout d'abord on numérote les sommets internes de 1 à n (si vous laissez tomber une bille entre les feuilles i et $i + 1$ elle arrive au sommet numéro i). Le sommet numéro i possède une branche de gauche et une branche de droite. Sur sa branche de gauche il y a a_i feuilles et sur sa branche de droite il y a b_i feuilles. Le produit $a_i b_i$ est la i -ème coordonnées du point $M(t)$. Cet algorithme définit les entiers a_i et b_i et donc on a construit les points $M(t)$ pour tout arbre t . Lorsque t parcourt les arbres à $n + 1$ feuilles on obtient ainsi $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ points de \mathbb{R}^n (c'est le fameux nombre de Catalan). Bien que ce ne soit pas immédiatement perceptible, ces points appartiennent à un même hyperplan car la somme de leurs coordonnées est constante (démonstration facile par récurrence) :

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

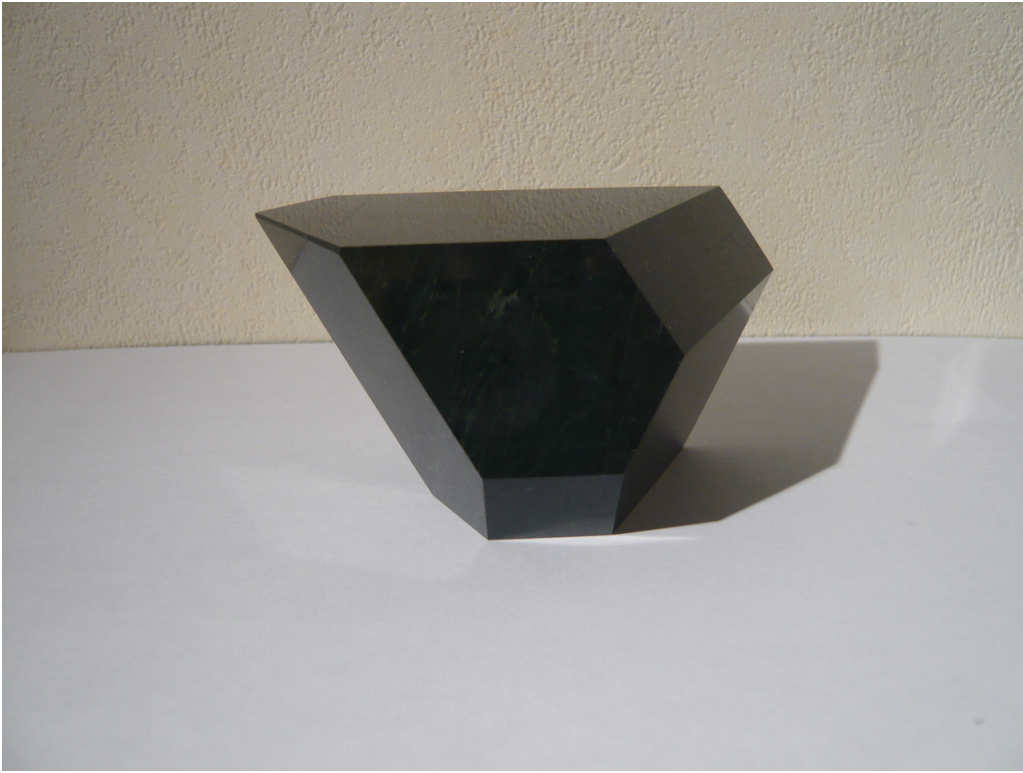
On démontre dans [J.-L. Loday, Realization of the Stasheff polytope. Arch. Math. (Basel) 83 (2004), no. 3, 267–278.] que l'enveloppe convexe des points $M(t)$ est le polytope de Stasheff \mathcal{K}^{n-1} de dimension $n - 1$, appelé aussi *associaèdre*. Voici \mathcal{K}^3 et ses coordonnées dans \mathbb{R}^4 :



Regardé comme un ovni dans le monde mathématique lors de son apparition dans les années soixante, l'associaèdre est devenu un objet incontournable dans de nombreux problèmes : espaces de lacets, algèbres à homotopie près, (A_∞ -algèbres), algèbres amassées, groupes de Thompson, compactification d'espaces de modules, algèbres dendriformes (renormalisation), fonctions parking (informatique théorique). Mais en fait ce n'est pas si surprenant car il touche à une notion fondamentale en mathématiques : l'associativité. Plus précisément il mesure le défaut d'associativité de certaines structures. Vous trouverez à l'adresse suivante :

www-irma.u-strasbg.fr/~loday/MISC/associaedreHistoire.pdf

la petite histoire de la découverte évoquée ci-dessus, ainsi que le lien avec l'artiste-mathématicien Albrecht Dürer.



Un associaèdre en jasper de l'Oural

JLL : INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE, CNRS ET UNIVERSITÉ DE STRASBOURG, 7 RUE R. DESCARTES, 67084 STRASBOURG CEDEX, FRANCE

E-mail address: loday@math.u-strasbg.fr