DAN QUILLEN

JEAN-LOUIS LODAY

Dan Quillen nous a quittés le 30 avril 2011, il avait 70 ans. Il a soutenu sa thèse de doctorat sous la direction de Raoul Bott à Harvard à l'âge de 24 ans. Après quelques années au MIT et quelques séjours en France, il s'est établi à l'Université d'Oxford (Grande-Bretagne) en 1984. Ses travaux ont été distingués par de nombreux prix, dont la Médaille Fields en 1978. Il y a plusieurs années les premiers symptômes de la maladie d'Alzheimer firent leur apparition, le contraignant à arrêter son activité scientifique, puis ses activités musicales avant de l'emporter définitivement.

On dit parfois qu'il y a deux sortes de mathématiciens : ceux qui planchent sur des conjectures pointues et ceux qui élaborent de vastes théories. Quillen excella dans les deux registres.

Je ne citerai pas ici tous ses travaux, mais pour ce qui est des conjectures il a, entre autres,

- donné une démonstration simple pour le calcul du groupe de cobordisme [9],
- démontré la conjecture d'Adams (donnant de précieux renseignements sur les groupes d'homotopie des sphères) [13],
- démontré une conjecture de Jean-Pierre Serre ; je devrais plutôt dire qu'il a répondu positivement à une question de Serre (sur la liberté des modules projectifs de type fini sur un anneau de polynomes).

Deux mots sur sa stratégie de démonstration concernant le cobordisme, à cause de sa limpidité. L'objectif consistait à calculer le "groupe de cobordisme des variétés", c'est-à-dire un certain invariant algébrique permettant de classifier, en un certain sens, toutes les variétés. La stratégie de Quillen fut de montrer que ce groupe possédait des propriétés algébriques plus fines que prévu : il démontra que c'était le "groupe formel universel". Il permettait ainsi de ramener ce calcul à un problème purement algébrique. Or il se trouvait que Michel Lazard avait précisément calculé ce groupe (indépendamment de la question du cobordisme) quelques temps auparavant, ce qui solutionnait la question.

En ce qui concerne l'élaboration de diverses théories, il développa la K-théorie [14], l'homotopie algébrique [8] et l'homotopie rationnelle [10]. L'homotopie rationnelle permet de construire des modèles minimaux pour les espaces topologiques simplement connexes (en caractéristique zéro), ce qui facilite grandement les calculs de groupes d'homotopie (le calcul de $\pi_{2n+1}(S^{2n})$ se fait alors en deux lignes). Ce travail, associé à celui de Dennis Sullivan, s'interprète maintenant comme la dualité de Koszul entre l'opérade des algèbres commutatives (Sullivan) et celle des algèbres de Lie (Quillen). L'homotopie algébrique, dans la lignée des travaux d'Alexandre Grothendieck et de Jean-Louis Verdier, a jeté les bases de ce qu'on appelle les catégories modèles, sujet qui s'est révélé être un outil très performant à la fois en topologie algébrique et en géométrie algébrique. C'est, de loin, son travail le plus cité.

Je vais vous raconter comment Quillen a découvert la K-théorie algébrique supérieure. Dans la fin des années soixante on connaissait le groupe de Grothendieck $K_0(A)$ d'un anneau A, construit à partir des modules projectifs de type fini sur A. C'était la grande époque des théories d'homologie (cohomologie de de Rham, homologie singulière, cobordisme, K-théorie topologique) et on savait confusément qu'il devait exister des groupes $K_n(A)$, dits de K-théorie supérieure, ayant de bonnes propriétés. Hyman Bass proposa le K_1, qui permettait de généraliser la notion de déterminant (plus exactement de l'étendre à des anneaux non commutatifs). Puis vint K_2 découvert par Michel Kervaire et John Milnor [6]. Mais, là, quelques déconvenues se firent jour. Les propriétés attendues n'étaient pas toutes au rendez-vous (contre-exemple de Richard Swan à l'existence d'une suite de Mayer-Vietoris). La situation était bloquée, malgré quelques avancées comme la théorie de Karoubi-Villamayor [3]. Puis tout d'un coup Quillen débarqua avec la "bonne" définition, et même mieux, il avait deux définitions, très différentes l'une de l'autre des groupes $K_n(A)$ et donc deux outils performants : la construction "+" et la construction "Q". Mieux encore, il avait même des calculs : ceux des groupes de K-théorie supérieure des corps finis. Ça paraissait incroyable, c'était un bond en avant fantastique (pour mémoire on ne sait toujours pas calculer complètement les groupes de K-théorie de $\mathbb{Z}$). Dans la foulée, Hyman Bass organisa à Seattle une grande conférence de deux semaines durant l'été 1972 à laquelle participèrent, outre Bass et Quillen, Borel, Karoubi, Kervaire, Milnor, Segal, Stasheff, Tate, Waldhausen, Wall et cinquante autres mathématiciens. C'est à cette occasion que je fis la connaissance de Quillen. Comment en était-il arrivé à ces résultats ?

Il faut se rappeler que Quillen avait eu Bott comme patron de thèse. L'espace topologique préféré de Bott était BU le classifiant du groupe unitaire, dont il avait démontré que l'homotopie était (et est toujours) périodique de période 2. Mais il y avait encore des questions sur BU, notamment celle de comprendre l'action des opérations d'Adams Ψ^p (de la conjecture du même nom, mentionnée plus haut). La question précise était : quel est l'espace fibre (on peut presque dire le noyau) de l'application $\Psi^p - \mathrm{id} : BU \to BU$? Grâce à sa grande culture, en particulier en théorie des représentations du groupe linéaire, Quillen avait réussi à calculer l'homologie de cet espace, il avait trouvé que c'était la même que celle du groupe linéaire (stable) du corps fini $\mathbb{F}_p$. Or on connait un tel espace, c'est le classifiant de ce groupe discret : $BGL(\mathbb{F}_p)$. Mais ça ne pouvait pas être lui car son groupe fondamental (le π_1) est le groupe discret lui-même, tandis que le groupe fondamental de la fibre est l'abélianisé. Mais Henri Cartan nous a appris comment faire pour se débarrasser d'éléments dans un groupe d'homotopie : il faut les tuer en ajoutant des cellules ! Donc pour tuer le π_1 Quillen rajouta des 2-cellules à $BGL(\mathbb{F}_p)$. Malheureusement celles-ci changent l'homologie, donc on est obligé de continuer, c'est à dire de rajouter des 3-cellules. Et là, miracle ! Quillen s'aperçoit que ça suffit. Le nouvel espace qu'il obtient, noté $BGL(\mathbb{F}_p)^+$, a la même homologie que l'espace de départ, avec un groupe fondamental abélien. Donc, par le théorème de J.H.C. Whitehead, c'est la fibre cherchée. Il faut bien voir que, jusque là, il n'est pas question de K-théorie. Mais, évidemment, Quillen a cherché à comprendre quelle était la propriété à l'origine de ce miracle et a découvert que l'hypothèse, vérifiée par $GL(\mathbb{F}_p)$ est que son groupe des commutateurs est "parfait". Cela signifie qu'il est égal à son propre groupe des commutateurs : $G = [G, G]$. Or cette propriété n'est pas spécifique à $\mathbb{F}_p$, pour tout anneau A le groupe des commutateurs de $GL(A)$, soit $E(A)$ le groupe des matrices élémentaires, est parfait : $E(A) = [E(A), E(A)]$. Ce résultat, dû à J.H.C. Whitehead, faisait partie de la panoplie des outils pour étudier K_1. On avait donc un espace $BGL(A)^+$ ayant la même homologie que celle de $BGL(A)$, mais avec un π_1 abélien. Maintenant il faut savoir que les autres groupes d'homotopie de $BGL(A)$ sont nuls, mais qu'en rajoutant des cellules, on a non seulement modifié le π_1, mais aussi tous les autres groupes d'homotopie supérieurs. On a donc maintenant toute une famille de groupes $\pi_n(BGL(A)^+$ pour $n \geq 1$. Quillen constata tout de suite que $\pi_1(BGL(A)^+) = K_1(A)$, $\pi_2(BGL(A)^+) = K_2(A)$, il a donc posé

$$K_n(A) := \pi_n(BGL(A)^+),$$

et la K-théorie supérieure était née.

Mais quid du problème initial ? C'est le bonus ! En effet, reformulé en termes de K-théorie, on peut dire que la fibre de l'application $\Psi^p - \mathrm{id} : BU \to BU$ a pour homotopie les groupes $K_n(\mathbb{F}_p)$. Or, on connait les groupes d'homotopie de BU (par Bott), on connait la longue suite exacte d'homotopie (par Serre), et on connait l'action des opérations d'Adams (par Adams), donc on en déduit tout de suite le calcul de $K_n(\mathbb{F}_p)$.

Quillen n'a jamais rédigé in extenso la démonstration du théorème sur la construction "+". Lorsque j'en ai eu besoin pour écrire ma thèse [4], j'ai eu recours aux bons soins de Michel Kervaire, qui avait utilisé une technique semblable quelques années auparavant dans son étude des sphères d'homologie. Il faut peut-être dire ici pourquoi les groupes de K-théorie sont si importants. Suivant le type d'anneaux que l'on considère on obtient des invariants en arithmétique, ou en géométrie différentielle, ou en topologie algébrique, ou en analyse. Par exemple la K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres est en étroite relation avec les valeurs de la fonction zêta de ce corps (conjectures de Lichtenbaum-Quillen). La comparaison de la K-théorie des corps avec l'homologie cyclique fait intervenir les polylogarithmes (travaux de Spencer Bloch et Alexander Goncharov).

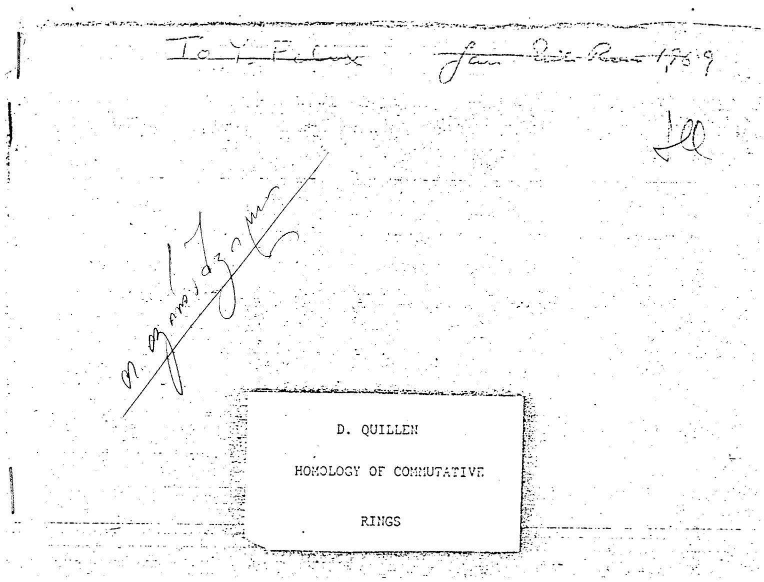
Ce n'est pas le lieu d'être exhaustif sur l'oeuvre mathématique de Quillen. Je me contenterais de signaler ses travaux sur l'homologie cyclique, initiée par Alain Connes [1], en collaboration avec moi-même [5], puis avec Joachim Cuntz [2]. Lors de cette collaboration Quillen avait pris conscience que l'existence d'une unité ou pas dans l'anneau devait avoir une influence déterminante sur les invariants adaptés (homologie cyclique ou K-théorie). L'un de ses derniers articles porte sur la K-théorie des anneaux non-unitaires [16]. Cet article ne porte que sur le K_0, mais Quillen pensait qu'il fallait revoir tous les K_n sous cet angle. Il y annonçait une théorie des modules sur un anneau non-unitaire. La maladie l'a empéché de mener à bien cette tâche. Il semble que personne n'ait encore repris le flambeau tellement il était en avance.

Socialement Quillen était quelqu'un de très discret, peu expansif, même s'il arborait toujours un sourire bienveillant. Je l'ai rencontré pour la première fois à Seattle en 1972. A mon arrivée à l'aéroport, il y avait tout un groupe de mathématiciens américains. Un de mes collègues m'indiqua lequel était Quillen. Ce fut un choc pour moi, car il était déjà dans notre univers un très très grand mathématicien et l'homme qui était là ressemblait à un adolescent, même si ses cheveux étaient déjà poivre et sel. Il eut peu d'étudiants, peu de co-auteurs, mais énormément de lecteurs et de continuateurs ("followers"). Une fois devant le tableau noir, on le sentait vivre, vibrer, c'était un feu d'artifice devant nos yeux. Sa pensée et ses écrits avaient toujours une grande qualité de concision : pas de mots superflus, pas de "baratin", pas de sauce inutile, il allait toujours au coeur de la question avec une économie d'outils et de mots extraordinaire. L'un des exemples les plus frappants est son tout premier article [7]. Publié dans Topology, il fait 2 pages dans lesquelles il démontre un théorème de Artin et Mazur. L'article de ces derniers, paru dans le même numéro, fait 40 pages. On peut se demander pourquoi il n'existe pas de "textbook" sur la K-théorie algébrique supérieure après 40 ans d'existence. Je pense que la raison principale tient justement à ce qu'a écrit Quillen sur le sujet. C'est tellement bien écrit, tellement concis, tellement clair, qu'on ne peut faire que deux choses : écrire moins bien ou copier-coller. La référence est et restera le "Springer Lecture Note 341" [14].

Une autre facette importante de la personnalité de Quillen est son extrême gentillesse et son humilité. Je ne rapporterai qu'un exemple parmi beaucoup d'autres. Dans la fin des années soixante, en complément de ses recherches sur l'homotopie rationnelle, il travailla aussi sur l'homologie des algèbres commutatives. Il s'était rendu compte que l'homologie de Harrison n'était pas la bonne hors de la caractéristique 0. Il élabora donc la "bonne" théorie avec toutes ses propriétés, ce qui donna lieu à une prépublication intitulée "Homology of commutative rings", répertoriée comme "Notes Miméographiées du MIT" [11]. Mais peu après cette rédaction il eut connaissance des travaux de Michel André sur le même sujet. Au lieu de se dépêcher d'envoyer son article pour publication (n'importe quelle revue l'aurait publié d'emblée), il le garda sous le coude et rédigea un autre article [12] dans lequel il fit la synthèse de ses travaux avec ceux de Michel André. La théorie est maintenant connue sous le nom de "André-Quillen (co)homology theory". Il va sans dire que ceux qui avaient pu récupérer les notes miméographiées tenaient là un précieux document. Celui-ci fut beaucoup photocopié, re-photocopié (pas d'électronique, mais photocopies payantes à l'époque), chacun mettant son nom sur la première page pour être sûr de récupérer sa copie. Je le sors encore assez souvent de mes archives à la demande de mes jeunes collègues.

L'annonce officielle de la découverte des groupes de K-théorie supérieure fut faite par Quillen lors du Congrès international des mathématiciens de 1970. Kervaire me procura une copie de la prépublication, où il était écrit, de la main de Quillen, sur la première page : "Nice talk". C'était effectivement un très bel exposé, mais quand je connus Quillen dans les années qui suivirent, je trouvais que ce commentaire ne cadrait pas du tout avec le personnage. Il n'était pas du genre à se faire des compliments. Ce n'est que bien plus tard, que je compris qu'il ne fallait pas lire "nice", mais bien "Nice", la ville d'organisation de ce congrès.

Les mathématiques m'ont apporté beaucoup de choses dans la vie, et croiser le chemin de Dan Quillen a été un très grand enrichissement et un réel bonheur.



References

[1] Connes, Alain Noncommutative differential geometry. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 62 (1985), 257–360.

[2] Cuntz, Joachim; Quillen, Daniel Algebra extensions and nonsingularity. J. Amer. Math. Soc. 8 (1995), no. 2, 251–289.

[3] Karoubi, Max; Villamayor, Orlando Foncteurs K_n en algèbre et en topologie. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 269 1969 A416–A419.

[4] Loday, Jean-Louis K-théorie algébrique et représentations de groupes. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 9 (1976), no. 3, 309–377.

[5] Loday, Jean-Louis; Quillen, Daniel Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices. Comment. Math. Helv. 59 (1984), no. 4, 569–591.

[6] Milnor, John Introduction to algebraic K-theory. Annals of Mathematics Studies, No. 72. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, 1971. xiii+184 pp.

[7] Quillen, D. G. Spectral sequences of a double semi-simplicial group. Topology 5 1966 155–157.

[8] Quillen, Daniel G. Homotopical algebra. Lecture Notes in Mathematics, No. 43 Springer-Verlag, Berlin-New York 1967 iv+156 pp.

[9] Quillen, Daniel On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory. Bull. Amer. Math. Soc. 75 1969 1293–1298.

[10] Quillen, Daniel Rational homotopy theory. Ann. of Math. (2) 90 1969 205–295.

[11] Quillen, Daniel Homology of commutative rings. Mimeographed Notes, MIT.

[12] Quillen, Daniel On the (co-) homology of commutative rings. 1970 Applications of Categorical Algebra (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVII, New York, 1968) pp. 65–87. A.M.S.

[13] Quillen, Daniel The Adams conjecture. Topology 10 1971 67–80.

[14] Quillen, Daniel Higher algebraic K-theory. I. Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), pp. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341, Springer, Berlin 1973.

[15] Quillen, Daniel Projective modules over polynomial rings. Invent. Math. 36 (1976), 167–171.

[16] Quillen, Daniel K_0 for nonunital rings and Morita invariance. J. Reine Angew. Math. 472 (1996), 197–217.

Strasbourg, le 11 mai 2011

Institut de Recherche Mathématique Avancée, CNRS et Université de Strasbourg, 7 rue R. Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

E-mail address: loday@math.unistra.fr