C. R. Acad. Sci. Paris, t. 333, Série I, p. 81–86, 2001
Algèbre/*Algebra*

# Une dualité entre simplexes standards et polytopes de Stasheff

**Jean-Louis LODAY [a], María O. RONCO [b]**

[a] Institut de recherche mathématique avancée, CNRS et Université Louis Pasteur, 7, rue R. Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France

[b] Departamento de Matemática Ciclo Básico Común, Universidad de Buenos Aires, Pab. 3 Ciudad Universitaria Nuñez (1428) Buenos-Aires, Argentina
Courriel : loday@math.u-strasbg.fr; mronco@mate.dm.uba.ar

(Reçu le 1er mai 2001, accepté le 21 mai 2001)

**Résumé.** On montre que la famille des modules de chaines des simplexes standards peut être munie d'une structure d'opérade. De même la famille des modules de cochaines des polytopes de Stasheff peut être munie d'une structure d'opérade. On montre que, d'une part, ces deux opérades sont duales l'une de l'autre, et, d'autre part, que ce sont des opérades de Koszul.
Les algèbres sur l'opérade des simplexes standards, appellées trigèbres associatives, sont déterminées par 3 opérations et 11 relations. Les algèbres sur l'opérade des polytopes de Stasheff, appellées trigèbres dendriformes, sont déterminées par 3 opérations et 7 relations.


***A duality between standard simplices and Stasheff polytopes***

**Abstract.** *We show that the family of chain modules over the standard simplices can be equipped with an operad structure. Similarly, the family of cochain modules of the Stasheff polytopes can be equipped with an operad structure. We first show that these operads are Koszul dual to each other, and second that they are both Koszul operads.*
*The algebras over the standard simplices operad, called* associative trialgebras, *are defined by* 3 *operations and* 11 *relations. The algebras over the Stasheff polytopes operad, called* dendriform trialgebras, *are defined by* 3 *operations and* 7 *relations.*


## *Abridged English version*

Let $\Delta^n$ be the the standard simplex of dimension $n$. We show that the chain module $\mathcal{P}_\Delta(n) := C_*(\Delta^{n-1}),\ n \geqslant 1$, can be equipped with a structure of non-$\Sigma$-operad (*cf.* [7]). Let $\mathcal{K}^n$ be the Stasheff polytope of dimension $n$. We show that the cochain module $\mathcal{P}^{\mathcal{K}}(n) := C^*(\mathcal{K}^{n-1}),\ n \geqslant 1$, can be equipped with a structure of non-$\Sigma$-operad. Both operads are quadratic and we show that they are dual to each other in the operadic sense (*cf.* [2]). Our main result is to show that both operads are Koszul operads, that is: the associated Koszul complexes are acyclic.

---

**Note présentée par Jean-Louis KOSZUL.**

S0764-4442(01)02014-6/FLA

Both operads are binary, generated by three operations, one for each cell of the interval $\Delta^1 = \mathcal{K}^1$. Hence the algebras over $\mathcal{P}_\Delta$ are determined by two operations of degree 0 and one of degree 1, and by 11 relations (one for each of the cells of the pentagon $\mathcal{K}^2$). They are called *associative trialgebras*, since all the relations are of the associativity type, cf. 2. The algebras over $\mathcal{P}^{\mathcal{K}}$ are determined by two operations of degree 0 and one of degree 1, and by 7 relations (one for each of the cells of the triangle $\Delta^2$). They are called *dendriform trialgebras*, because the cells of the Stasheff polytope can be parametrized by the planar trees, cf. 3.

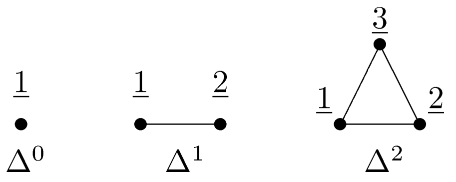
---

CONVENTION. – On travaille sur un corps $K$ et le produit tensoriel au-dessus de $K$ est noté $\otimes$. Le produit tensoriel de $n$ copies de l'espace vectoriel $V$ est noté $V^{\otimes n}$.

## 1. L'opérade des simplexes standards

Le simplexe standard $\Delta^n$ est par définition le polytope

$$\Delta^n := \big\{(x_0,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \text{ and } x_0+\cdots+x_n = 1\big\} :$$




Le sommet $\underline{i}$ a toutes ses coordonnées nulles sauf la $(i-1)$-ième qui vaut 1. Une face de dimension $d$ de $\Delta^{n-1}$ est complètement déterminée par ses sommets, c'est à dire par un sous-ensemble à $d+1$ éléments de $[n] := \{\underline{1},\dots,\underline{n}\}$. Le complexe de chaines de $\Delta^{n-1}$ est noté $C_*(\Delta^{n-1}) = \bigoplus_{d\geqslant 0} C_d(\Delta^{n-1})$. On prendra pour base de $C_d(\Delta^{n-1})$ les sous-ensembles à $d+1$ éléments de $[n]$, car chacun de ces sous-ensembles détermine une cellule de dimension $d$ de $\Delta^{n-1}$.

On définit une structure d'opérade sur les $\mathcal{P}_\Delta(n) := C_*(\Delta^{n-1})$ de la manière suivante. L'application de composition $\gamma : \mathcal{P}_\Delta(n)\otimes\mathcal{P}_\Delta(i_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{P}_\Delta(i_n) \to \mathcal{P}_\Delta(i_1+\cdots+i_n)$ est complètement déterminée par sa valeur sur les vecteurs de base des $\mathcal{P}_\Delta(k)$. Notons bij : $[i_1]\cup\cdots\cup[i_n] \to [i_1+\cdots+i_n]$ la bijection qui envoie $k\in[i_l]$ sur $i_1+\cdots+i_{l-1}+k$. Soit $X = \{\underline{j_1},\dots,\underline{j_k}\} \subset [n]; X_1\subset[i_1],\dots,X_n\subset[i_n]$ des vecteurs de base. On pose

$$\gamma(X;X_1,\dots,X_n) := \mathrm{bij}(X_{j_1}\cup\cdots\cup X_{j_k}) \subset [i_1+\cdots+i_n].$$

PROPOSITION 1.1. – *La composition $\gamma$ définie ci-dessus munit les $\mathcal{P}_\Delta(n)$, $n\geqslant 1$, d'une structure d'opérade* (*non symétrique*)*.*

Rappelons que l'on travaille dans le cadre des opérades non symétriques, donc le foncteur $P_\Delta$ : Vect $\to$ Vect est donné par $\mathcal{P}_\Delta(V) = \bigoplus_{n\geqslant 1}\mathcal{P}_\Delta(n)\otimes V^{\otimes n}$.

## 2. Les trigèbres associatives

Par définition une *trigèbre associative* est la donnée d'un espace vectoriel $A$ et de trois opérations :

$$\dashv : A\otimes A \to A \quad \text{(opération gauche)},$$

$$\vdash : A\otimes A \to A \quad \text{(opération droite)},$$

$$\perp : A\otimes A \to A \quad \text{(opération milieu)},$$

satisfaisant aux 11 relations suivantes :

$$\begin{cases} (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z), & (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), \\ (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), & (x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \\ (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), & (x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \\ (x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), & (x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \\ (x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), & (x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \\ \\ (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z). \end{cases}$$

THÉORÈME 2.1. – *L'opérade* (*non symétrique*) $\mathcal{P}_\Delta$ *des simplexes standards est binaire et quadratique. Une algèbre sur* $\mathcal{P}_\Delta$ *est une trigèbre associative. En particulier, la trigèbre associative libre sur un générateur* $\mathcal{P}_\Delta(K)$ *s'identifie à* $\bigoplus_{n \geqslant 1} C_*(\Delta^{n-1})$ *muni des opérations induites par*

$$X \dashv Y = \mathrm{bij}(X), \quad X \vdash Y = \mathrm{bij}(Y), \quad X \perp Y = \mathrm{bij}(X \cup Y).$$

Ici $X \subset [p]$ (resp. $Y \subset [q]$) est considéré comme un sous-ensemble de $[p] \cup [q]$, et $X \dashv Y,\ X \vdash Y,\ X \perp Y$ comme des sous-ensembles de $[p+q]$. Si l'on oublie l'opération $\perp$, alors $A$ est tout simplement une digèbre associative au sens de [3,4]. Les algèbres associatives sont des exemples particuliers de trigèbre associative en prenant $\dashv = \vdash = \perp$.

Comme l'opérade $\mathcal{P}_\Delta$ est quadratique, elle admet une opérade duale au sens de la dualité de Koszul des opérades dûe à Ginzburg et Kapranov [2]. Son calcul, et en particulier son lien avec les polytopes de Stasheff, est l'objet des paragraphes suivants.

*Trigèbres associatives différentielles.* – Une trigèbre associative $A$ est dite différentielle graduée, si l'on a $A = \bigoplus_{n \geqslant 1} A_n$ et une application linéaire $d : A \to A$ de degré $-1$ et de carré nul, vérifiant de surcroit :

$$d(x \dashv y) = dx \dashv y, \quad d(x \vdash y) = (-1)^{|x|} x \vdash dy, \quad d(x \perp y) = dx \perp y + (-1)^{|x|} x \perp dy.$$

La somme de complexes de chaines $\bigoplus_{n \geqslant 1} C_*(\Delta^{n-1})$ forme un trigèbre associative différentielle graduée.

## 3. Les trigèbres dendriformes

Par définition une *trigèbre dendriforme* est la donnée d'un espace vectoriel $D$ et de trois opérations :

$$\prec : D \otimes D \to D \quad \text{(opération gauche)},$$

$$\succ : D \otimes D \to D \quad \text{(opération droite)},$$

$$\cdot : D \otimes D \to D \quad \text{(opération milieu)},$$

satisfaisant aux 7 relations suivantes :

$$\begin{cases} (x \prec y) \prec z = x \prec (y * z), & (x \succ y) \cdot z = x \succ (y \cdot z), \\ (x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z), & (x \prec y) \cdot z = x \cdot (y \succ z), \\ (x * y) \succ z = x \succ (y \succ z), & (x \cdot y) \prec z = x \cdot (y \prec z), \\ \\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \end{cases}$$

où $x * y := x \prec y + x \succ y + x \cdot y$.

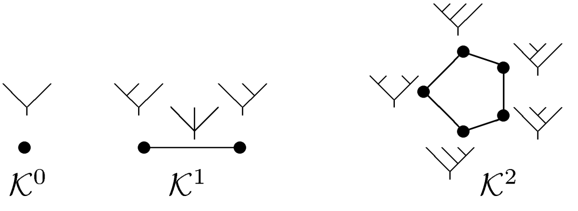
THÉORÈME 3.1. – *L'opérade des trigèbres dendriformes est duale, au sens de la dualité de Koszul des opérades, de l'opérade des trigèbres associatives.*

L'opérade $\mathcal{P}_\Delta$ est engendrée par les trois opérations $\dashv,\ \vdash,\ \perp$, donc l'opérade duale $\mathcal{P}_\Delta^!$ est aussi engendrée par 3 opérations que l'on note $\prec,\ \succ,\ \cdot$. La dimension de l'espace des opérations que l'on peut faire avec 3 variables est $2\times 3^2=18$. L'espace des relations de $\mathcal{P}_\Delta^!$ est l'orthogonal, pour une certaine forme quadratique non dégénérée, de l'espace des relations de $\mathcal{P}_\Delta$. Il est donc de dimension $18-11=7$. On vérifie qu'il est bien engendré par les relations de définition des trigèbres dendriformes.

Si l'opération $\cdot$ est triviale, alors la trigèbre dendriforme $D$ est une digèbre dendriforme au sens de [3,4].

On remarque aisément, en ajoutant toutes les relations, que le produit $*$, somme des trois produits $\prec,\ \succ,\ \cdot$, munit $D$ d'une structure d'algèbre associative. Ainsi toute trigèbre dendriforme détermine une algèbre associative. Ce foncteur est dual du foncteur qui va des algèbres associatives dans les trigèbres associatives (rappellons que l'opérade des algèbres associatives est auto-duale).

*L'opérade des polytopes de Stasheff.* – Le polytope de Stasheff $\mathcal{K}^n$, appelé parfois *associaèdre*, est un polytope simple de dimension $n$, homéomorphe à la boule unité et dont les sommets sont en bijection avec les parenthésages associatifs d'un mot à $n+2$ lettres, *cf.* [9]. De manière équivalente on peut identifier ces mots parenthésés aux (classes d'isotopie d') arbres binaires planaires à $n+2$ feuilles (et donc $n+1$ sommets internes). Les faces de dimension $d$ de $\mathcal{K}^n$ sont en bijection avec les arbres planaires à $n+2$ feuilles et $n+1-d$ sommets internes. On note $C^*(\mathcal{K}^n)=\bigoplus_{d\geqslant 0}C^d(\mathcal{K}^n)$ le module de cochaines de $\mathcal{K}^n$ et on prend pour base de $C^d(\mathcal{K}^n)$ les arbres planaires à $n+2$ feuilles et $n+1-d$ sommets internes :




Rappelons que tout arbre planaire à $n+1$ feuilles $x$ est le greffé d'un certain nombre d'arbres : $x=x^{(1)}\vee\cdots\vee x^{(k)}$ avec $k\geqslant 2$ si $x\neq |$.

THÉORÈME 3.2. – *L'opérade binaire quadratique* (*non symétrique*) $\mathcal{P}^{\mathcal{K}}$ *des trigèbres dendriformes est telle que* $\mathcal{P}^{\mathcal{K}}(n)=C^*(\mathcal{K}^{n-1})$.

*En particulier, la trigèbre dendriforme libre sur un générateur* $\mathcal{P}^{\mathcal{K}}(K)$ *s'identifie à* $\bigoplus_{n\geqslant 1}C^*(\mathcal{K}^{n-1})$ *muni des opérations induites par*

$$x\prec y=x^{(1)}\vee\cdots\vee\big(x^{(k)}*y\big),$$

$$x\succ y=\big(x*y^{(1)}\big)\vee\cdots\vee y^{(\ell)},$$

$$x\cdot y=x^{(1)}\vee\cdots\vee\big(x^{(k)}*y^{(1)}\big)\vee\cdots\vee y^{(\ell)},$$

*où* $y=y^{(1)}\vee\cdots\vee y^{(\ell)}$.

Dans ces formules récursives l'arbre $|$ sans sommet interne est élément neutre pour l'opération $*$.

*Remarques* 3.3. – Il est bien connu que les complexes de chaines $C_*(\mathcal{K}^n)$ forment une opérade (régissant les $A_\infty$-algèbres), *cf.* [9]. Mais dans ce cas $C_*(\mathcal{K}^n)$ est en degré $n+2$ alors que dans notre contexte il est en degré $n+1$. On a donc à faire à une tout autre opérade.

Les espaces vectoriels $\mathcal{P}^{\mathcal{K}}(n)=C^*(\mathcal{K}^{n-1})$ sont filtrés par la dimension des cellules. La structure d'opérade est compatible avec cette filtration. L'opérade graduée associée est celle construite par Chapoton dans [1].

La digèbre (resp. trigèbre) dendriforme libre est naturellement munie d'une comultiplication dont l'étude est faite dans [8] (resp. dans une publication ultérieure).

## 4. Opérades de Koszul

A toute opérade quadratique $\mathcal{P}$ ou peut associer un complexe de Koszul (*cf.* [2]). Lorsque celui-ci est acyclique on dit que l'opérade est de Koszul. L'une des conséquences de cette propriété est l'existence d'un « petit » complexe explicite, construit à partir de l'opérade duale $\mathcal{P}^!$ pour calculer l'homologie de Quillen d'une $\mathcal{P}$-algèbre $A$. On note $C_*^{\mathcal{P}}(A)$ ce complexe et $H_*^{\mathcal{P}}(A)$ son homologie.

THÉORÈME 4.1. – *Le complexe de chaines d'une trigèbre dendriforme $A$ est donné par*

$$C_n^{\mathcal{P}^{\mathcal{K}}}(A) = C_*\left(\Delta^{n-1}\right) \otimes A^{\otimes n}, \qquad d = -\sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i d_i,$$

*avec $d_i(X; a_1, \ldots, a_n) = (d_i(X); a_1, \ldots, a_i \circ_i^X a_{i+1}, \ldots, a_n)$, où $d_i(X)$ est l'image de $X$ par l'application $d_i : [n] \to [n-1]$ donnée par*

$$d_i(\underline{r}) = \begin{cases} \underline{r-1} & \text{si } i \leqslant r-1, \\ \underline{r} & \text{si } i \geqslant r \end{cases}$$

*et où $\circ_i^X$ est donné par*

$$\circ_i^X = \begin{cases} \cdot & \text{si } i \in X \text{ and } i+1 \in X, \\ \prec & \text{si } i \notin X \text{ and } i+1 \in X, \\ \succ & \text{si } i \in X \text{ and } i+1 \notin X, \\ * & \text{si } i \notin X \text{ and } i+1 \notin X. \end{cases}$$

THÉORÈME 4.2. – *Le complexe de chaines d'une trigèbre associative $A$ est donné par*

$$C_n^{\mathcal{P}_\Delta}(A) = C_*\left(\mathcal{K}^{n-1}\right) \otimes A^{\otimes n}, \qquad d = -\sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i d_i,$$

*avec $d_i(t; a_1, \ldots, a_n) = (d_i(t); a_1, \ldots, a_i \circ_i^t a_{i+1}, \ldots, a_n)$, où $d_i(t)$ est l'arbre obtenu à partir de $t$ en supprimant la $i$-ième feuille, et où $\circ_i^t$ est donné par*

$$\circ_i^t = \begin{cases} \dashv & \text{si la } i\text{-ème feuille de } t \text{ est orientée vers la gauche,} \\ \vdash & \text{si la } i\text{-ème feuille de } t \text{ est orientée vers la droite,} \\ \perp & \text{si la } i\text{-ème feuille de } t \text{ est l'une des feuilles du milieu.} \end{cases}$$

THÉORÈME 4.3. – *Les deux opérades $\mathcal{P}_\Delta$ et $\mathcal{P}^{\mathcal{K}}$ sont des opérades de Koszul.*

Puisqu'elles sont duales l'une de l'autre il suffit de montrer que $\mathcal{P}_\Delta$ est de Koszul. On sait, d'après [2], qu'il est équivalent de montrer que l'homologie de la $\mathcal{P}$-algèbre libre $\mathcal{P}(V)$ est triviale, plus précisément que $H_1^{\mathcal{P}}(\mathcal{P}(V)) = V$ et $H_n^{\mathcal{P}}(\mathcal{P}(V)) = 0$ pour $n > 1$.

En fait il suffit de regarder le cas $V = K$. On montre alors que le complexe $C_*^{\mathcal{P}_\Delta}(\mathcal{P}_\Delta(K))$ est somme directe (indexée par les cellules des simplexes standards) de complexes de chaines augmentés de certains ensembles simpliciaux. On achève la preuve en montrant que ces ensembles simpliciaux sont contractiles.

*Séries génératrices.* – Lorsqu'une opérade quadratique non symétrique $\mathcal{P}$ est de Koszul, d'opérade duale $\mathcal{P}^!$, sa série génératrice $f^{\mathcal{P}}(x) := \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \dim \mathcal{P}(n) x^n$ vérifie la propriété suivante, *cf.* [2] :

$$f^{\mathcal{P}}\left(f^{\mathcal{P}^!}(x)\right) = x.$$

On peut affiner ce résultat dans le cas des opérades quadratiques à valeurs dans les espaces vectoriels filtrés en remplaçant $\dim \mathcal{P}(n)$ par le polynome de Poincaré $p(n,t) = \sum_{i\geqslant 0} p_i(n) t^i$, où $p_i(n)$ est la dimension de l'espace $F^i\mathcal{P}(n)/F^{i-1}\mathcal{P}(n)$. On obtient alors la série génératrice $f_t^P(x) := \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n p(n,t)x^n$. Lorsque $\mathcal{P}$ est de Koszul les séries $f_t^{\mathcal{P}}$ et $f_t^{\mathcal{P}^!}$ sont encore inverses l'une de l'autre.

Pour $\mathcal{P}_\Delta$ on obtient $p(n,t) = \frac{1}{t}((1+t)^n - 1)$ et donc

$$f_t^\Delta(x) = -\frac{x}{(1+x)(1+(1+t)x)}.$$

En conséquence du théorème 4.1, $f_t^{\mathcal{K}}(x)$ est la série génératrice inverse. On obtient

$$f_t^{\mathcal{K}}(x) = \frac{-(1+(2+t)x) + \sqrt{1+2(2+t)x+t^2x^2}}{2(1+t)x}.$$

On a ainsi obtenu, comme sous-produit, la série génératrice des arbres planaires. On vérifie immédiatement que $f_0^{\mathcal{K}}$ est la série génératrice des nombres de Catalan et $f_1^{\mathcal{K}}$ la série génératrice des super nombres de Catalan.

## 5. Opérades cubiques

Une dualité similaire existe pour la famille de polytopes $I^n$, c'est à dire les hypercubes. Les complexes de modules de chaines $\mathcal{P}_Q(n) := C_*(I^{n-1})$ s'assemblent pour donner une opérade. L'opérade duale est donnée par $\mathcal{P}^Q(n) := C^*(I^{n-1})$. Les algèbres associées sont les *trigèbres cubiques* définies par 3 opérations et 9 relations. Ces deux opérades sont de Koszul et leur série génératrice commune est $f_t^I(x) = -\frac{x}{1+(t+2)x}$. On vérifie immédiatement que l'on a : $f_t^I(f_t^I(x)) = x$.

## Références bibliographiques

[1] Chapoton F., Opérades, polytopes et bigèbres, Thèse, Université Paris VI, 2000.
[2] Ginzburg V., Kapranov M., Koszul duality for operads, Duke Math. J. 76 (1) (1994) 203–272.
[3] Loday J.-L., Algèbres ayant deux opérations associatives (digèbres), C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 321 (2) (1995) 141–146.
[4] Loday J.-L., Dialgebras, in: Dialgebras and Related Operads, Lecture Notes in Math., Vol. 1763, Springer-Verlag, 2001, pp. 7–66.
[5] Loday J.-L., Ronco M.O., Hopf algebra of the planar binary trees, Adv. Math. 139 (2) (1998) 293–309.
[6] Loday J.-L., Ronco M.O., Trialgebras, en préparation.
[7] Operads, in: Proceedings of Renaissance Conferences, Hartford, CT/Luminy, 1995, Contemp. Math., Vol. 202, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 37–52.
[8] Ronco M.O., A Milnor–Moore theorem for dendriform Hopf algebras, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 332 (2000) 109–114.
[9] Stasheff J.D., Homotopy associativity of $H$-spaces. I, II, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) 275–292; Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) 293–312.